

Министерство образования и науки Республики Казахстан

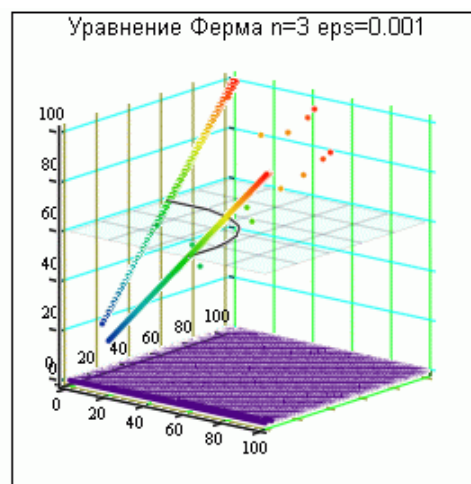
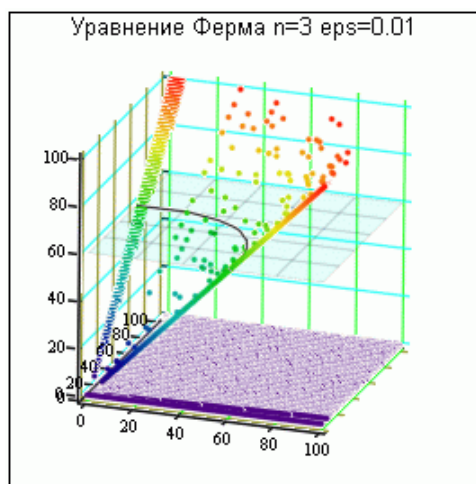
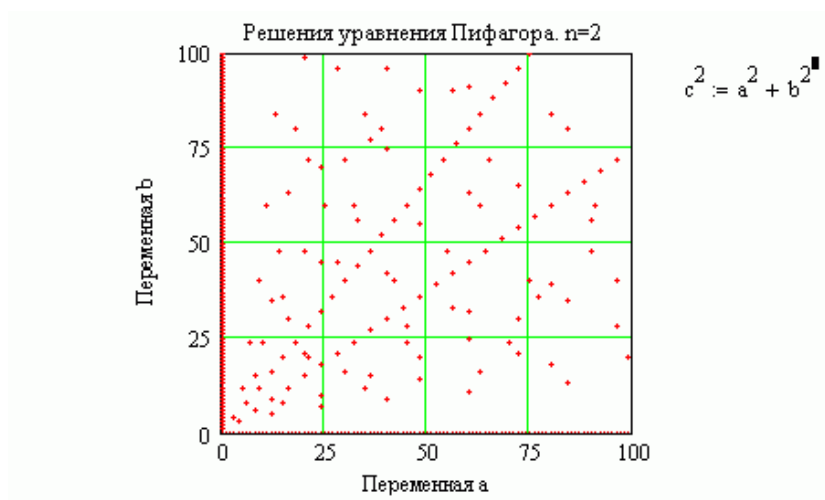
Рудненский индустриальный институт

Кафедра
автоматизации и
информационных систем

Федосов Б.Т.

Теорема Ферма глазами инженера

Некоторые свойства целочисленных и почти целочисленных решений уравнений Пифагора, Ферма и их обобщений



Рудный 2014

Рассмотрены некоторые свойства целочисленных и почти целочисленных решений уравнений Пифагора, Ферма и их обобщений. Обсуждается вопрос их практического применения. Изложение наглядно иллюстрируется рисунками, выполненными в Маткаде. Прилагается архив документов Маткада с вычислениями и построениями

Содержание

Введение

1. Формулировка теоремы Ферма. История доказательства
2. Практическое значение теоремы Ферма
3. Численное исследование уравнения Ферма
4. Обобщения уравнений Пифагора и Ферма
 - 4.1. «Супертеорема» Пифагора
 - 4.2. «Суперуравнение» Ферма

Заключение

Литература

Приложения

- П 1. Целочисленные и почти целочисленные решения уравнения Пифагора в ограниченном диапазоне изменения его аргументов
- П 2. Свойства «почти целочисленных» решений уравнения Ферма
- П 3. Графическая прикладная эстетика решений уравнений Пифагора и Ферма
- П 4. Внутренняя кухня получения выдающихся результатов
- П 5. Архив документов Маткада 2001 (версия 10)

Введение

Теорему Ферма (Petri de Fermat) доказывали более трех с половиной столетий, с 1637 года, как выдающиеся математики, так и любители. Привлекательность этой задачи заключалась в простоте формулировки теоремы и отсутствии очевидного практического применения ее результатов. В 1995 году теорема была окончательно доказана [1]. Однако запись доказательства составила 126 страниц! Естественно, большинство людей не рискнут даже заглянуть в такое пространное доказательство. Но все-таки хочется узнать, в чем суть теоремы и особенностей ее решений. Или, по крайней мере, хотя бы поверхностно изучить уравнение Ферма и узнать свойства его решений.

Если возникает какая-нибудь задача, например, по проектированию некоторого прибора, устройства или системы, или по исследованию чего-то, то можно поступить двояко: или сначала ознакомиться со всеми известными решениями и затем, при возможности, найти свое, оригинальное, или, напротив, начать с «чистого листа», найти свое решение, а потом изучить известные решения.

В первом случае, поскольку известных решений часто оказывается довольно много, то после их изучения, кажется, что изобрести что-то новое, свое, уже и невозможно. Остается выбрать наилучшее из известных для решения поставленной задачи.

Во втором случае, часто бывает, что найденное решение уже кто-то нашел раньше. Но случается, если повезет, что найденное решение отличается от известных решений и в каких-то отношениях лучше их. Исследуем уравнение Ферма именно так. Во-первых, изменим подход: будем искать не целочисленные, а близкие к целочисленным решения уравнения и рассмотрим свойства этих решений. Во-вторых, исследования будем проводить не аналитически, а в численной форме, применяя Маткад. Такой подход, естественно, не приведет к строгому доказательству теоремы Ферма, но позволит узнать свойства уравнения Ферма. Свойства уравнений могут, в свою очередь, возможно, подсказать направления практического применения уравнения Ферма.

Наконец, не будет лишним попытаться обобщить уравнение Ферма и рассмотреть свойства общего уравнения.

Целочисленные решения, фигурирующие в формулировке теоремы, являются абсолютно точными, поскольку абсолютно точными являются целые числа. Т.о. наличие целочисленных решений приближает некоторые математические модели к абсолюту. С другой стороны, человек в своей деятельности зачастую вполне довольствуется и приближенными значениями. В данной статье как раз и рассматривается уравнение Ферма и его обобщения с точки зрения инженера, т.е. изучаются свойства «почти целочисленных», близких к целым значениям решений.

Статья рассчитана на старших школьников, студентов и аспирантов. Хочется верить, что наглядное представление свойств решений уравнений Пифагора и Ферма натолкнет читателя на самостоятельные исследования и получение практически полезных результатов.

1. Формулировка теоремы Ферма. История доказательства

Широкая популярность теоремы Ферма объясняется, в частности, простотой формулировки и, как следствие, кажущейся простотой возможного ее доказательства или опровержения.



Рис. 1.1. Пьер де Ферма (Petri de Fermat). 17.08.1601 - 12.01.1665 в 1637 году сформулировал свою Великую теорему (<http://www.biograpedia.ru/node/4621>)

Зачем, т.е. с какой целью, и почему именно так Ферма сформулировал свою знаменитую теорему? А многие математики, любители и профессионалы, столь долго ее доказывали?

Представляется, что Ферма, изучая Арифметику Диофанта, из чистого, без примеси корысти, любопытства, поинтересовался, а какие свойства будут у решений уравнения Пифагора, если возводить члены правой и левой его частей не в квадрат, а в произвольную целую степень. И каковы эти свойства, если принимать в расчет только натуральные числа?

Ферма почувствовал, что такого рода уравнение не имеет решения в целых числах, высказал эту гипотезу, и даже доказал ее для уравнения четвертого порядка. На поиск решений в целых числах, вероятно, Ферма надоумил «египетский треугольник» ($3^2 + 4^2 = 5^2$).

Последователи Ферма из чистого любопытства, а также, может быть и честолюбия, неоднократно пытались доказать эту теорему. И, в конце концов, доказали. При этом, оказалось, как часто бывает, что не столько само решение, как результат, сколько развитие математических методов исследований и доказательств и составляет самую ценную часть этой работы.

Итак, сам Ферма опубликовал доказательство частного случая для $n=4$, что добавляет сомнений в том, что у него было доказательство общего случая.

Эйлер в 1770 году доказал теорему для случая $n=3$, Дирихле и Лежандр в 1825 - для $n=5$, Ламе - для $n=7$. Куммер показал, что теорема верна для всех простых n , меньших 100, за возможным исключением т. н. иррегулярных простых 37, 59, 67. [<http://www.km.ru/referats/332599-velikaya-teorema-ferma#>]

Со временем, когда математики сами разберутся в методе доказательства теоремы Ферма, а методисты изложат ее в виде, доступном для простых смертных, может оказаться, что методы

доказательства будут полезны и непосредственно в технических дисциплинах. Правда, настораживает то, что автор окончательного доказательства, профессор Принстонского университета Эндрю Уайлс, законченного с помощью его бывшего аспиранта Ричарда Тейлора, ввел понятие «минимального математического инструмента» [1]. Вот цитата из [1]:

«Дело в том, что пересчет проходит под контролем математических инструментов, не имеющих аналогов не только в далеком прошлом, но и неизвестных до Уайлса даже в современной математике.

Самое главное здесь в том, что эти инструменты «минимальны», т.е. их нельзя упростить. Хотя сама по себе эта «минимальность» весьма непростая. И именно осознание Уайлсом этой нетривиальной «минимальности» и стало решающим финальным шагом доказательства. Это как раз и была та самая «вспышка» 19-го сентября 1994 года».



Рис.1.1. Сэр Эндрю Джон Уайлс, доказавший в 1995 году Великую теорему Ферма. Википедия

Не окажется ли навсегда теорема Ферма только достоянием математиков ввиду трудности понимания простыми смертными?

Итак, непосредственно полезных для техники и экономики результатов теоремы Ферма пока не несет. Может быть со временем, математический аппарат, созданный Уайлсом, найдет свое применение и в технике.

Формулировка

История и изучение доказательства теоремы Ферма, а также адаптация доказательства с привлечением геометрии приведены во многих источниках, например, в [1]. Адаптация эта относительная, довольно «шершавая», в большей мере рассчитанная на математиков, а не на простых смертных.

Итак, знаменитая теорема Ферма гласит: уравнение

$$x^n + y^n = z^n \tag{1.1}$$

при $n > 2$ не имеет целочисленных решений.

Теорема доказана спустя три с половиной столетия после ее формулировки Ферма. И занимает доказательство почти полторы сотни страниц. Естественно, не только простые люди, но даже профессиональные математики далеко не все смогут и захотят разобраться в этом доказательстве.

Можно сказать, что Ферма, при всем уважении, «недостаточно корректно» обобщил формулу теоремы Пифагора, да не сочтут это утверждение святотатством. Возможные варианты обобщения этой формулы приведены ниже в параграфе 4. Однако при иных способах обобщения целочисленные решения имеются. Так что, может быть случайно, а может быть и намеренно, но Ферма нашел именно такую формулировку, такое обобщение уравнения Пифагора, при котором целочисленные решения действительно отсутствуют.

2. Практическое значение теоремы Ферма

Какова практическая польза от некоторой математической конструкции или инструмента и где это можно применить на практике? Это главные вопросы, интересующие инженера при ознакомлении с чем-то. Пожалуй, непосредственной значимой практической пользы от теоремы Ферма получить в настоящее время не удалось. Тем не менее, изучая то, что связано с теоремой, можно найти некоторые закономерности, открыть новые методы исследования целочисленных и свойства приближенных решений, которые могут оказаться и полезными на практике.

Целочисленные решения уравнений и результаты измерений привлекают к себе внимание, в частности, потому, что целое число абсолютно точное. И это с философской точки зрения свидетельство возможности достижения в некоторых областях или задачах абсолюта. Отсюда, вероятно, и желание математиков, отражающее это стремление, отыскивать решения задач в целых числах и исследовать такие примеры.

Не следует забывать и о том, что львиная доля информации формируется, передается, получается, обрабатывается и хранится в дискретном, цифровом виде, т.е. в виде единиц и нулей. Здесь принципиально могут быть только целые значения. Поэтому, если удастся применить результаты изучения теоремы Ферма в области информатики, телевидения и связи это и будет положительным результатом.

Уравнение Ферма далеко не самое сложное из тех, что применяют инженеры. Тем не менее, и для его практического применения нужно бы его прежде исследовать, найти его характерные свойства, может быть обобщить. И на этом основании может оказаться, что благодаря некоторым свойствам уравнения и могут быть применены непосредственно на практике.

Человек в процессе своей повседневной жизни занимается оценкой значений величин или измерениями. Измерение это процесс сравнения измеряемой величины с выбранным заранее эталоном, в результате которого (процесса сравнения) определяется численное соотношение между ними.

Значение результата некоторого вида измерений, например оценка числа людей, яблок, монет, нейтронов, импульсов и т.п., может быть выражена только целыми числами, т.е. такой результат может быть абсолютно точным. Ошибка оценки также может быть только целой. В других, более многочисленных случаях, оцениваемое значение принципиально может быть выражено только иррациональным числом, и не всегда имеет точную грань. Пример – рост человека можно назвать только с некоторым приближением, ну, скажем плюс – минус миллиметр. Потому, что рост человека меняется в течение дня на несколько миллиметров, да и сказать, где еще человек, а где он уже «закончился» с абсолютной точностью нельзя.

Может быть, теорема Ферма непосредственно и не имеет какого-либо заметного практического смысла, на что, косвенно, указывает и то, что ее доказывали три с половиной века. Но сама работа над доказательством позволила математикам разработать новые методы, высказать и доказать ряд новых гипотез и теорем, которые позволили глубже понимать суть математических проблем и, как следствие, окружающий мир.

С другой стороны, зачастую человеку требуется всего лишь приблизительный, с некоторой точностью, результат. Поэтому можно попробовать исследовать уравнение не только на наличие абсолютных, целых решений, но и поинтересоваться каковы свойства решений, если нужно отыскивать близкие к целочисленным, «почти целые» решения. К тому же, в ряде случаев комбинация результатов измерений может быть только целочисленной, например, сумма измеренных приближенно углов плоского треугольника, должна быть равна 180° . Такие требования могут быть использованы для оценки точности метода, способа и средств измерений. А свойства египетского треугольника со сторонами 3, 4 и диагональю 5 позволяют весьма точно строить прямые углы на плоскости.

Подумать только, теорему Ферма математики доказывали больше 350 лет! Вот что значит архаичные методы управления наукой, когда процесс организации решения пущен на самотек! В наше время, когда мы обогащены Системой менеджмента качества и грантовой системой, опираясь на специалистов, подготовленных в соответствии с Болонской конвенцией и Единым госэкзаменом, эту проблему можно было бы легко решить за полгода. Нужен только квалифицированный менеджмент и эффективный менеджер. Например, объявляется конкурс на получение трех грантов.

1. Грант первый. 100 000 долл. США. Время выполнения работы по гранту два месяца. Решить в целых числах уравнение $a^n + b^n = 0$. Обоснование для получения гранта должно составлять не менее 500 страниц текста и файла 200 МБ. По материалам работы должно быть опубликовано не менее трех статей в цитируемых источниках.
2. Грант второй. 200 000 долл. США. Решить в целых числах уравнение $c^n = 0$. Обоснование для получения гранта должно составлять не менее 800 страниц текста и файла 400 МБ. Время выполнения работы по гранту два месяца. Должно быть опубликовано не менее пяти статей в цитируемых источниках.
3. Грант третий - синтетический. 400 000 долл. США. Доказать в целых числах, что $0 = 0$. Обоснование для получения гранта должно составлять не менее 1000 страниц текста и файла 800 МБ. Время выполнения работы по гранту два месяца. Должно быть опубликовано не менее десяти статей в цитируемых источниках.

Итак, при правильном управлении и умеренных затратах, всего за полгода теорема Ферма была бы доказана! Это ли не свидетельство острой необходимости перевода организации научной работы от невразумительных поисков, основанных на интуиции одиночек-ученых, к контролируемому менеджментом эффективному производству научных знаний и смыслов!

Окончательное доказательство теоремы Ферма представил в 1995 году профессор Принстонского университета Эндрю Уайлс, спустя 358 лет после того, как она была сформулирована. Гипотезе Пуанкаре повезло больше. Григорий Перельман, выпускник Ленинградского университета, доказал ее справедливость всего через сто лет после ее формулирования. Такие продолжительные сроки доказательств с одной стороны свидетельствуют об отсутствии непосредственной практической пользы от этих теорем. С другой стороны, это указывает на трудность поставленных и решенных задач. Вызывает большое уважение стремление авторов этих доказательств получить результат, не обращая внимания на утилитарно-меркантильную сторону вопроса, не выпрашивая гранты и награды. Это и есть чистая наука.

В связи с этим хочется сказать, что общество, только спорадически поддерживая талантливых людей, не способных толкаться локтями, теряет много талантов. И хочется надеяться, что оно осознает эту проблему и к своей выгоде займется поддержкой незаурядных личностей в плановом порядке, на систематической основе.

Конечно, при разработке огромных научных и технических проектов, например, андронного коллайдера в ЦЕРН, гигантских телескопов, системы GPS и Глонас, совершенно необходимо правильно организовать управление, сформулировать цели и задачи всей работы и отдельных ее этапов. Но это, скорее не наука, а технология, что, впрочем, вовсе не принижает практической значимости, как самих этих работ, так и их результатов.

3. Численное исследование уравнения Ферма

Методы исследований и доказательств ученых и инженеров

Математик основывает свои доказательства некоторых утверждений и гипотез на строгих теоретических методах. Например, он доказывает, что **все нечетные числа простые** следующим образом.

Берем 1 – это простое число. Берем 3 – простое, 5 – простое. А дальше по математической индукции: пусть i – номер нечетного простого числа, тогда и $i+1$ – нечетное, а, значит, и простое! Т.о. доказано, что все нечетные числа – простые! :-)

Физик устанавливает причинно-следственные связи экспериментально и теоретически обобщает полученные эмпирические зависимости. Например, он доказывает, что **все нечетные числа простые** вот так.

Берем первые нечетные числа и проверяем, простые ли они. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19. Как видно – практически все нечетные числа простые. Числа 9 и 15 не укладываются в эту зависимость, но это легко объясняется ошибками эксперимента (измерений), а остальные числа отлично укладываются в доказываемую закономерность. Следовательно, экспериментально с высокой степенью уверенности (98.4% по критерию шесть сигма!) доказано, что все нечетные числа – простые.

Инженер устанавливает свойства и характеристики исследуемых объектов исходя из их практической значимости, своего опыта и природной интуиции. Например, он утверждает и доказывает, что **все числа меньше 100!** Доказательство осуществляется следующим образом.

Берем первый десяток: 0,1,2,...,9. Проверяем. Оказывается, что все эти числа действительно меньше 100. Выберем произвольно еще несколько чисел: 12, 34, 61, 78, 92. Как видно, любое из них также меньше ста. Следовательно, все числа меньше 100!

Анекдот шестидесятых годов 20-го века

Разговаривают два древнегреческих геометра, показывая на своего собрата, у которого в руках линейка с делениями: «Это шулер, у него линейка крапленая!».

Карикатура в журнале «Знание-сила», 1960-е гг:

В данной статье не ставится амбициозная задача найти альтернативное известному доказательство теоремы Ферма, как и разбор последнего, или доступное его изложение. Задача совсем иная: рассмотреть свойства знаменитого уравнения Ферма, и его приближенных решений, которые, возможно, помогут найти ему некоторое практическое применение.

Инженеры используют и куда более сложные уравнения для описания, например, объектов управления, т.е. динамических систем. Тем не менее, почему бы и не рассмотреть и свойства уравнения Ферма?

При рассмотрении свойств уравнения Ферма сформулируем задачу иначе, чем в его теореме: а можно ли получить приближенные, почти целые решения уравнения, и с какой точностью, каковы будут свойства у таких решений?

Рассмотрим примеры «почти целочисленных» решений уравнения Ферма. Попробуем установить, есть ли некоторые закономерности в приближенном, с оговоренной точностью, решении уравнений Ферма, как много таких решений и нельзя ли получить решение со сколь угодно малой ошибкой.

Итак, будем решать уравнение,

$$x^n + y^n = (z + \delta z)^n, \quad |\delta z| < \varepsilon \quad (3.1)$$

и исследовать его свойства. В (3.1) переменные x , y и z – целые числа, а ε – малое число, которое будет характеризовать требуемую точность решения, т.е. близость решения, значения z к целому числу, при целых x и y .

Для уравнения Ферма 3-й степени есть почти целочисленные решения с точностью, выше, например, чем $\varepsilon = 0.001$:

$$28^3 + 85^3 = 636077 \quad \left(28^3 + 85^3\right)^{\frac{1}{3}} = 86.000946 \quad \frac{86.000946 - 86}{86} = 0.000011$$

$$86^3 = 636056 \quad 86.000946^3 = 636076.990079 \quad \frac{28^3 + 85^3 - 86^3}{86^3} = 0.000033 \quad (3.2)$$

Пример «почти целочисленного» решения уравнения Ферма. Для значений аргументов $x = 28$ и $y = 85$ имеется целое решение $z = 86$ с относительной точностью 0.000011. Само уравнение при этом выполняется с относительной точностью 0.000033.

Все почти целочисленные решения уравнения Ферма, например третьего порядка, при изменении аргументов x и y в некотором диапазоне, можно отобразить на трёхмерной диаграмме

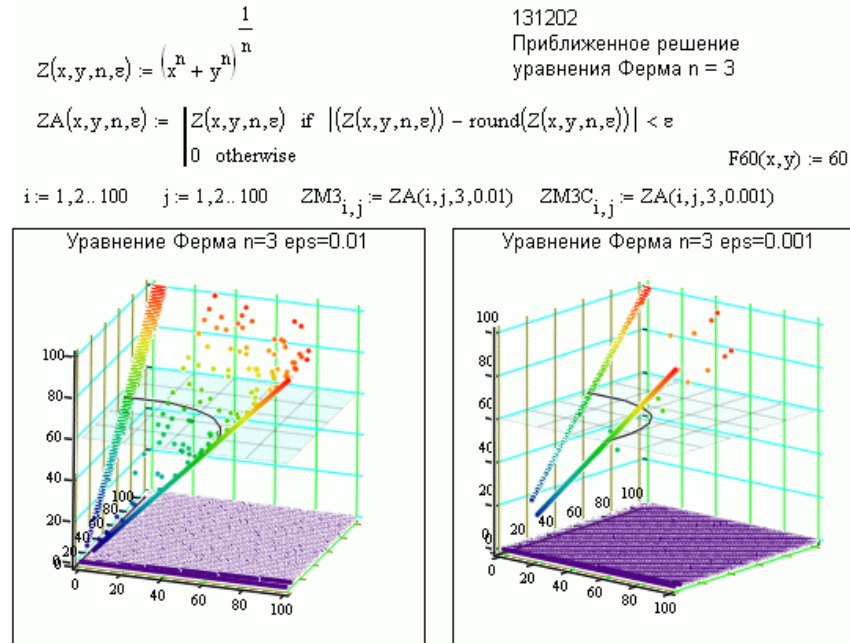


Рис.3.1. Фрагмент рабочего поля Маткада. В горизонтальной плоскости отложены целочисленные аргументы, а по вертикали – решения, близкие к целочисленным. Приближенные, «почти целочисленные» решения уравнения Ферма для $n = 3$ располагаются на поверхности «надутого паруса» между двумя «мачтами». Число решений существенно убывает с повышением требований к точности решения от $\varepsilon = 0.01$ (левый график) до $\varepsilon = 0.001$ (график справа). Показана плоскость $z = 60$ и линия сечения этой плоскостью поверхности «паруса». Построения и расчеты в данной работе проведены в Маткаде версии 10

Построения для других значений n см. в Приложении, файл
131202_P3_Fermat_N_3_Plot3D_Line.mcd

Поясним появление ряда решений, соответствующих «мачтам» на рис. 3.1. Будем искать такое целое значение y , при котором решение близко к $z = x + 1$, т.е. всего на единицу или несколько единиц больше.

$$z + \varepsilon z := \left(x^n + y^n\right)^{\frac{1}{n}} \quad x := 100 \quad z := 101 \quad y = ?$$

$$100^3 = 1000000 \quad 101^3 = 1030301 \quad \frac{1}{3} = 31.175899$$

$$1030301 - 1000000 = 30301 \quad 30301^{\frac{1}{3}} = 31.175899$$

$$31^3 + 100^3 = 1029791 \quad \frac{1}{3} = 100.983332$$

$$\frac{1030301 - 1029791}{1030301} = 0.000495 \quad 1029791^{\frac{1}{3}} = 100.983332$$

$$101 - 100.983332 = 0.016668 \quad \frac{101 - 100.983332}{101} = 0.000165$$

$$x := 100 \quad y := 31 \quad z := 101 \quad \varepsilon z := 0.016668$$

(3.3)

Как видно, можно найти такое целое значение второго, малого аргумента, при котором решение с некоторой точностью, в данном случае в 0.017 в абсолютной мере и 0.017% в относительной, будет практически целым. Такие решения и образуют две дуги, поскольку аргументы симметричны.

Отметим, что Ферма неспроста ограничил область изменения аргументов только натуральными числами (1,2,3 ...). Действительно, если добавить сюда и ноль, то уравнения получает целочисленные решения вида:

$$0^n + y^n = z^n \quad (3.4)$$

Т.е. в геометрической трактовке область состоятельности теоремы Ферма, допустимый диапазон изменения аргументов x и y , включает только числовую плоскость, но не оси координат.

Если рассечь горизонтальной плоскостью чертеж рис.3.1, например, на уровне $z = 60$, то вблизи этого сечения в тонком слое будут располагаться почти целые решения, а сечение будет иметь, в зависимости от степени уравнения вид:



Рис.3.2. Приближенные, «почти целые» решения вблизи значения $z = 60$, т.е. в слое $z = 60 \pm 0.1$. Сечение с увеличением степени уравнения Ферма стремится от дуги окружности при $n = 2$, к «углу» при $n \rightarrow \infty$. Число точек, т.е. почти целочисленных решений, с уменьшением ϵ существенно уменьшается

Доказанная в 1995 году теорема Ферма утверждает, что целочисленных решений уравнения Ферма нет. Но, может быть, есть решения, неограниченно, т.е. с любой желательной точностью приближающиеся к целым?

Посмотрим, как изменяется число почти целых решений при конечном диапазоне изменения аргументов и уменьшении допуска между приближенным решением и ближайшим целым числом:

Зависимость числа почти целых решений от величины eps - допуска по точности

```

Sum(n,k,eps) := | S ← 0
                  for i ∈ 1..k
                    for j ∈ 1..k
                      (S ← S + 1) if ZA(i,j,n,eps) > 0
                  | S
    
```

$c^n := a^n + b^n$
 n - степень уравнения
 k - диапазон изменения аргументов a и b
 eps - точность

Sum(10,10,0.01) = 62 Sum(100,5,0.01) = 21 Sum(2,20,0.00001) = 14
 eps(st) := 10st st := -8, -7.9 .. -1

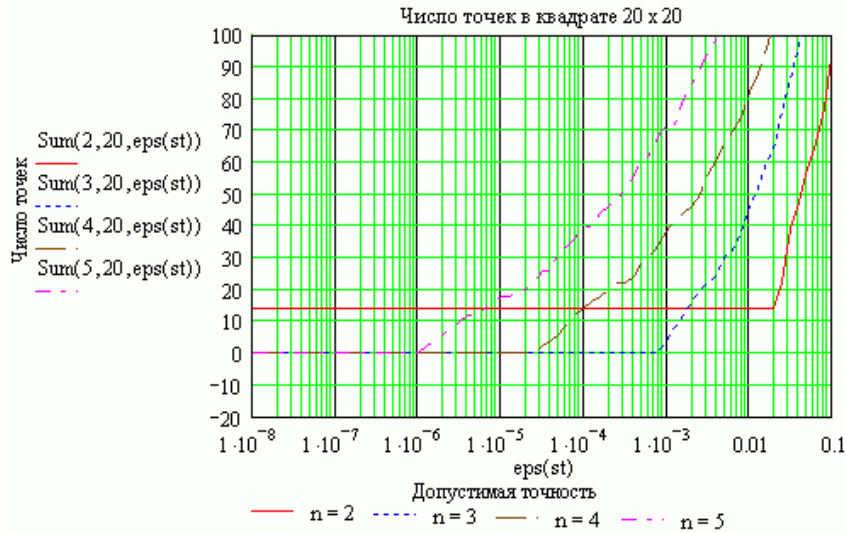


Рис.3.3. В квадрате аргументов a и b размером 20x20 уравнение Пифагора (n = 2) имеет 14 целочисленных решений. Уравнения Ферма порядков 3, 4 и 5 не имеют целочисленных решений. Более того, ясно виден порог точности, лучше которой в квадрате 20x20 вообще нет близких к целочисленным решений. Для n = 3 порог равен 10⁻³, для n = 4 порог 3·10⁻⁵, а для n = 5 порог равен 10⁻⁶. Т.е. с увеличением степени уравнения порог уменьшается

См. файл 131202_P3_Fermat_N_3_Plot3D_Line.mcd

В диапазоне a и b 100x100 только для n = 2, т.е. для уравнения теоремы Пифагора имеется 126 целочисленных решений, а при n > 2, таких решений, естественно, нет. Для заранее заданной точности ε существует порог близких к целочисленным решений уравнения Ферма. Это такое значение eps, ниже которого нет даже приближенных решений:

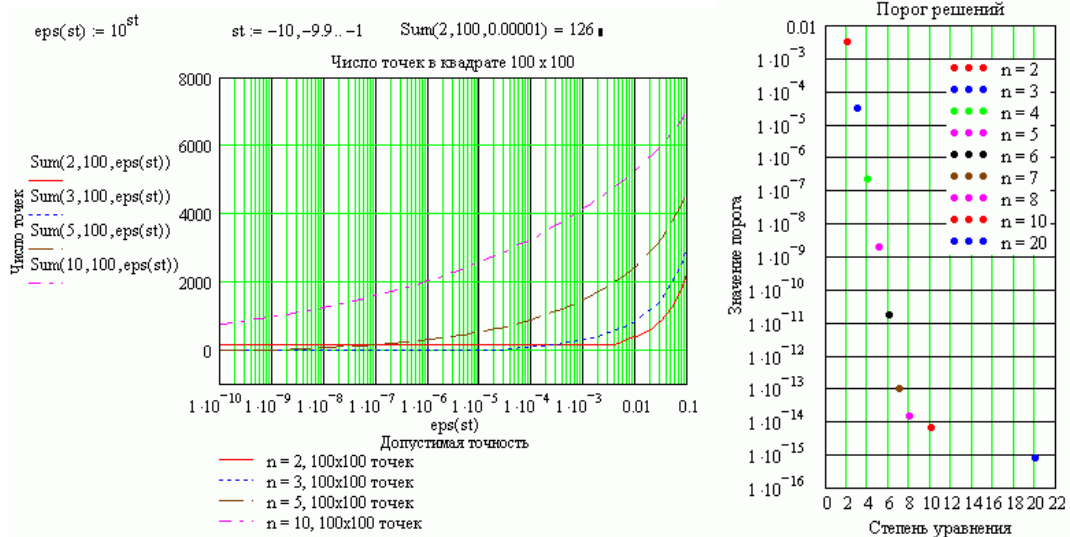


Рис. 3.4. Число «почти целочисленных» решений уравнения Ферма при изменении значений аргументов в квадрате 100×100 становится нулевым при достаточно высоких требованиях к точности. Но формально, неограниченного стремления решения к целому не происходит. Для $n = 2$ (теорема Пифагора) имеется 126 целочисленных решений. Порог наличия приближенных «почти целочисленных» решений уменьшается при увеличении степени уравнения сначала энергично, затем значительно более медленно

Рисунки 3.2, 3.3 и 3.4 не являются, естественно, доказательством правильности теоремы Ферма, они просто ее подтверждают и иллюстрируют. Однако для инженера они показывают, что стремление числа почти точных решений к нулю, пусть и в ограниченном, но довольно широком диапазоне изменения аргументов, свидетельствует о справедливости теоремы, т.е. о том, что целочисленных решений уравнения Ферма не существует. В то же время, по мере увеличения порядка уравнения можно найти решения, близкие к целочисленным с довольно высокой точностью, которая может оказаться вполне достаточной на практике.

Таким образом, бесконечного приближения решения уравнения Ферма к целому числу нет. Число почти целых решений в некотором конечном диапазоне изменения аргументов конечно, а значит и ограничено по точности. Однако с повышением порядка уравнения можно получать все более точное приближение решения к целому.

4. Обобщения уравнений Пифагора и Ферма

Если вы решаете некоторую задачу, то важно и очень полезно подумать, а какие еще задачи такого рода можно сформулировать и попробовать решить. И поставить вопрос: а можно ли обобщить задачу на более широкий круг условий? А также подумать, нельзя ли получить непосредственную или косвенную пользу от найденных решений?

Ферма «не правильно» обобщил теорему Пифагора. ☺ Конечно, никто никому не может запретить обобщать формулы так, как он это видит, и исследовать полученные обобщения. Этим хочется обратить внимание читателя только на то, что обобщение теоремы Пифагора можно провести и другими, может быть, более основательными или «красивыми» способами.

А как же еще можно было обобщить теорему Пифагора? В общем-то, ввиду очевидности уравнений Пифагора и Ферма наверняка обобщения уже сделали, и для этого не требуется большого ума. Но каковы свойства обобщенных уравнений? Как их отобразить наглядно, графически?

В наше время масс-медиа приучили зрителей к напыщенным высказываниям и названиям, когда чему-то мелкому незаслуженно присваивается громкое название с приставкой супер, например суперзвезда и т.п. Следуя этому поветрию, используем такой прием для названия обобщений уравнений Пифагора и Ферма. Безусловно, такие обобщения заслуживают этого, имея в виду, что супер означает сверх. Обобщение состоит в распространении диапазона изменения аргументов уравнений с двумерного на многомерное пространство.

4.1. «Супертеорема» Пифагора

Поскольку непосредственным толчком для данного исследования послужила теорема Ферма, область состоятельности которой определена только на множестве натуральных чисел (1,2,3,4 и т.д.), то и исследование обобщений терем теорем Пифагора и Ферма проведем именно с этой точки зрения, может быть, дополнительно включая в рассмотрение и нулевые аргументы.

Теорема Пифагора уже давно в высшей алгебре распространена на случай n -мерного пространства, где n – конечное, и даже бесконечное число.

$$a^2 + b^2 + \dots + c^2 = d^2 \text{ или } \sum_{i=1}^n a_i^2 = d^2 \quad (4.1.1)$$

Величина d называется нормой, т.е. длиной вектора с координатами a_i в n -мерном евклидовом пространстве. Геометрический смысл (4.1.1) состоит в том, что квадрат длины диагонали многомерного прямоугольного суперпараллелепипеда равен сумме квадратов длин его ребер.

Например, для $n = 3$

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 \quad (4.1.2)$$

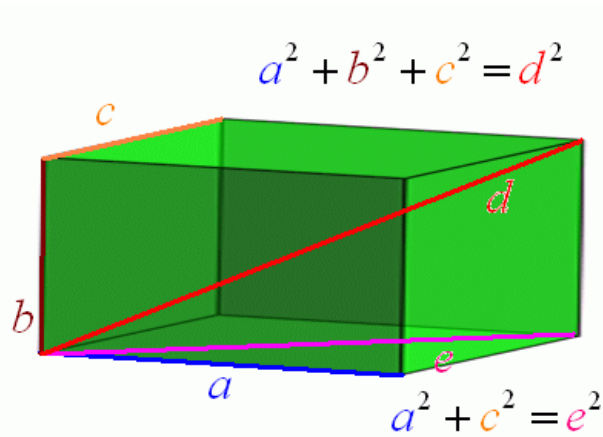


Рис.4.1.1. Трехмерный вариант теоремы Пифагора. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его ребер

Для этого уравнения, имеются целочисленные решения, например:

$$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2, \quad 2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2 \quad (4.1.3)$$

Как видно в (4.1.2), переменные a , b и c входят в уравнение симметрично. Поэтому каждому решению соответствуют еще пять решений, которые можно получить перестановками переменных. Исключение из рассмотрения этих симметричных решений упрощает анализ.

Кроме того, нетрудно видеть, что для каждого решения (4.1.2) есть бесконечное число решений (назовем их трассой), получаемых при кратном увеличении всех переменных одновременно. Такие кратные решения также можно исключить из рассмотрения.

В результате этих исключений останутся только исходные «минимальные», независимые решения, которые можно назвать **порождающими**, как и точки, соответствующие им на графике. Полное число целочисленных решений при изменении аргументов в заданном диапазоне найдется учетом симметрии и кратности.

Для удобства анализа введем в рассмотрение и нулевые значения переменных.

Число целочисленных решений при изменении значений аргументов в кубе, т.е. в трехмерном пространстве, в зависимости от длины стороны:

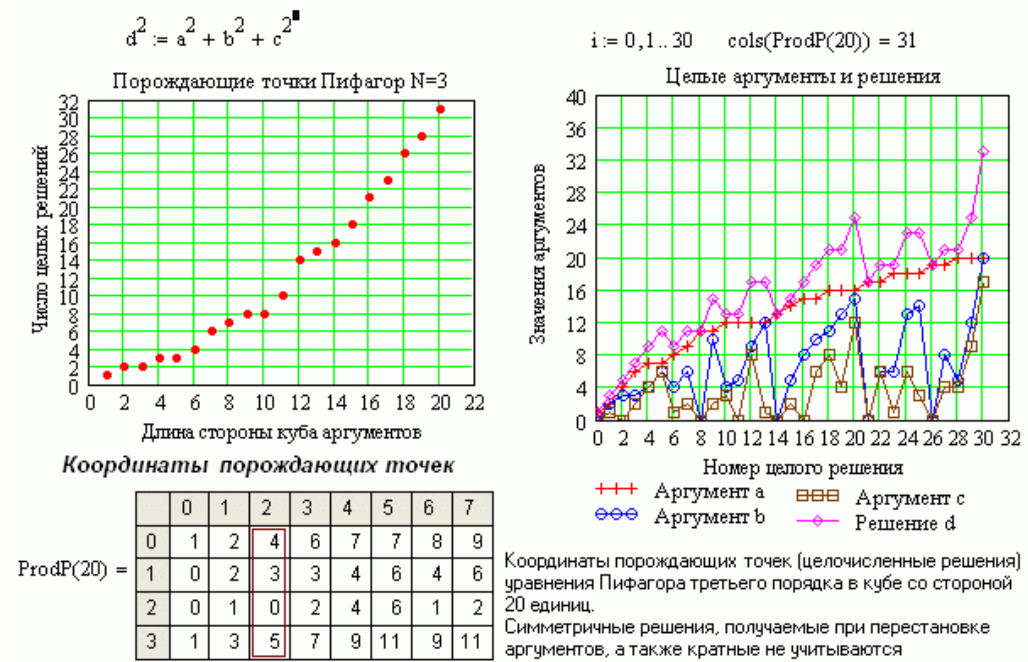


Рис. 4.1.2. Зависимость числа целочисленных порождающих решений уравнения Пифагора третьей степени от размера стороны куба, в котором изменяются аргументы. Как видно, число решений увеличивается по нарастающей, близкой к параболе. В нулевой, первой и второй строках таблицы значения переменных (аргументов) a, b и c соответственно, а в третьей – целочисленные решения d. Выделен египетский треугольник, решение, при котором аргументы находятся на грани куба, поскольку последний аргумент c во втором столбце равен нулю. Всего порождающих решений в кубе со стороной 20 единиц насчитывается 31
 Вычисления и построения приведены в архиве Приложения, в файле Маткада в.10 131218_P41_Pythagoras_Produce_Point_N_3.mcd

Итак, уравнение Пифагора третьей степени имеет целочисленные решения. Приведем аналогичные построения и для уравнения Пифагора четвертой степени.

$$\text{NumProdP4}(1) = 2 \quad \text{NumProdP4}(2) = 4 \quad \text{NumProdP4}(3) = 3 \quad \text{NumProdP4}(5) = 8$$

$$\text{NumProdP4}(6) = 10 \quad \text{NumProdP4}(8) = 19 \quad \text{NumProdP4}(10) = 30 \quad \text{NumProdP4}(20) = 175$$

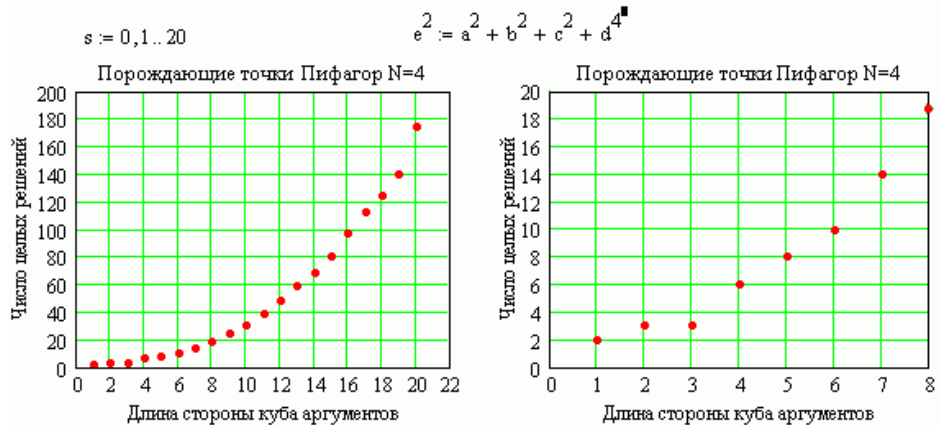


Рис.4.1.3. Зависимость числа целочисленных порождающих решений уравнения Пифагора четвертой степени от размера стороны суперкуба, в котором изменяются аргументы. Рост числа решений происходит по нарастающей при увеличении длины ребра куба, в котором изменяются аргументы



Рис.4.1.4. Значения целочисленных порождающих решений уравнения Пифагора четвертой степени как функция номера решения при выбранном алгоритме селекции. См. в архиве Приложения файл Маткада 131220_P41_Pyphagoras_Produce_Point_N_4.mcd

Как видно, и уравнение Пифагора четвертой степени имеет множество целочисленных решений. Можно предположить, что и уравнения более высоких степеней также имеют целочисленные решения при изменении аргументов в n -мерном суперкубе конечного размера. Действительно, наметим доказательство по математической индукции. Если в область определения входит и ноль, то решение более высокой степени будет включать и решения более низких, для которых целочисленные решения есть. Что и требовалось доказать.

Могут рассматриваться и рассматриваются даже бесконечномерные пространства, и там может быть корректно введена конечная норма вектора, при условии, что координаты вектора достаточно быстро уменьшаются при увеличении номера i координаты. Очевидно, что целочисленных решений уравнения Пифагора при бесконечной размерности пространства существовать не может ввиду необходимости устремлять аргументы к нулю.

Таким образом, суперуравнение Пифагора, как и его исходное уравнение, имеет целочисленные решения в многомерном пространстве. Совокупность таких решений задается порождающими решениями, которых сравнительно немного.

Можно попробовать использовать порождающие решения суперуравнений Пифагора разных степеней в задачах кодирования информации с избыточностью, когда порождающим решениям будут соответствовать разрешенные кодовые комбинации.

4.2. «Суперуравнение» Ферма

Уравнение Ферма можно обобщить и в виде,

$$a^n + b^n + \dots + c^n = d^n \quad (4.2.1)$$

т.е. на n -мерное пространство. Или, что то же самое

$$\sum_{i=1}^n a_i^n = d^n \quad (4.2.2)$$

Здесь число слагаемых слева равно степени, в которую возводятся переменные.

Интересно, что по аналогии с двумерным случаем, для трехмерного случая можно найти решение в виде, когда аргументы и решение представляют собой последовательность целых чисел, который условно можно назвать «египетским параллелепипедом»

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3, \quad 3^3 + 4^3 + 5^3 = 216, \quad 6^3 = 216 \quad (4.2.3)$$

Таким образом, сумма объемов кубов, построенных на ребрах параллелепипеда величиной 3, 4, 5 равна объему куба со стороной, равной 6.

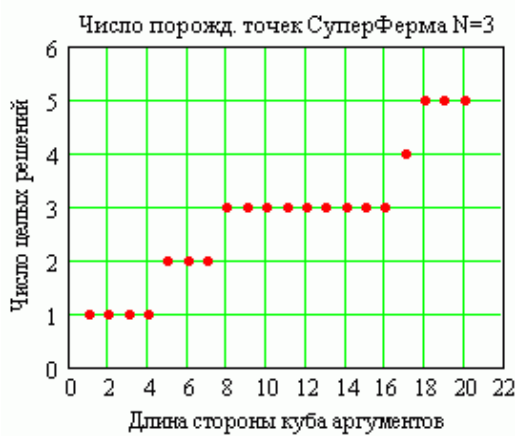
Есть и другие целочисленные решения, например, удваивая каждое значение в (4.2.3) получим:

$$6^3 + 8^3 + 10^3 = 12^3, \quad 6^3 + 8^3 + 10^3 = 1728, \quad 12^3 = 1728 \quad (4.2.4)$$

Сочетание «минимальных», несимметричных, независимых аргументов, как и ранее, назовем порождающим решением. А на графике, «порождающей точкой». Это такие аргументы, которые при делении на целое число не дают одновременно целых, являющихся решением уравнения, и не являются результатом перестановки аргументов.

$$s := 0, 1..20 \quad d^3 := a^3 + b^3 + c^3$$

$$s1 := 0, 1..100$$



Координаты порождающих точек

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ProdPF3(50) =	0	1	5	8	17	18	21	22	27	33	37	37	40	41	44	49
	1	0	4	6	14	10	19	17	15	32	30	36	17	23	34	42
	2	0	3	1	7	3	18	4	11	6	27	3	2	16	29	15
	3	1	6	9	20	19	28	25	29	41	46	46	41	44	53	58

Рис. 4.2.1. Зависимость числа целочисленных порождающих решений кубического суперуравнения Ферма от размера стороны куба, в котором изменяются аргументы. В кубе с длиной ребра 20 таких решений всего 5, в кубе 50x50x50 порождающих решений 15 (см. таблицу). В нулевой, первой и второй строках таблицы приведены целочисленные аргументы, а в третьей строке – значение решения.

См. в Приложении архив Fermat_Pythagoras_Prop_MCD_10, файл 131222_SuperFermat_N_3.mcd

Итак, кубическое суперуравнение Ферма имеет целочисленные решения, число которых при изменении аргументов в кубе 50x50x50 сравнительно невелико и равно 15. Действительно, в этом кубе всего 125000 точек, т.е. различных значений аргументов (15/125000 = 0.00012). Отметим, что в кубе с ребром 100 целочисленных решений суперуравнения Ферма уже 55 (55/1000000 = 0.000055).

Общее представление об этих решениях может дать и трехмерный рисунок расположения целочисленных аргументов:

Порождающие точки в 3D. Куб 50x50x50

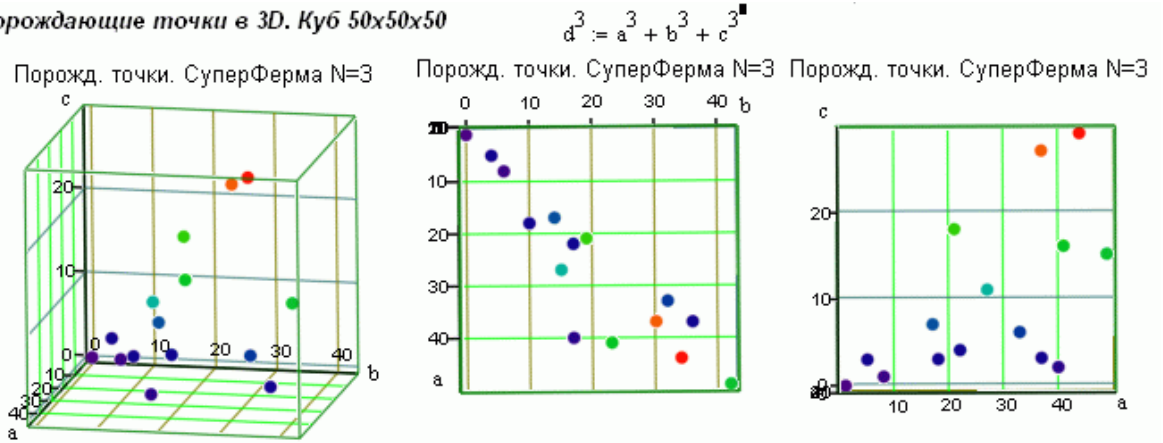


Рис.4.2.2. Порождающие точки (целочисленные решения суперуравнения Ферма третьего порядка) в кубе с длиной ребра 50 единиц. Градиент цвета – по аргументу c , т.е. зеленые выше темно-синих, красные выше зеленых. Отметим, что на гранях куба точек со значениями больше нуля нет, что и доказывает теорема Ферма

Итак, Ферма случайно или намеренно при обобщении уравнения Пифагора осуществил его так, ограничившись всего двумя переменными, чтобы диапазон изменения аргументов приходился лишь на грань многомерного суперкуба, но не включал в себя его ребра. А в полном диапазоне, т.е. например, внутри куба, целочисленные решения имеются.

Хотя это и очевидно, отметим, что если решение суперуравнения Ферма третьего порядка целочисленное, то оно располагается не на грани куба аргументов. При анализе некоторой задачи это может оказаться полезным признаком.

Поскольку целочисленных решений суперуравнения Ферма третьего порядка в ограниченном диапазоне изменения аргументов куда меньше, чем сочетаний этих аргументов, то эти целочисленные решения могут быть, например, использованы как разрешенные комбинации при кодировании сообщений, передаваемых в каналах связи с помехами. Для нахождения и даже исправления ошибок передачи.

К сожалению, уже для четвертой степени, т.е. для четырехмерного параллелепипеда, соотношение, аналогичное (4.2.3), где аргументы и решение представляют собой последовательные целые числа, не выполняется:

$$3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 = 2258, \quad 7^4 = 2401 \quad (4.2.5)$$

Т.е. четырехмерного «египетского параллелепипеда» не существует.

Более того, в четырехмерном случае при изменении аргументов в суперкубе со сторонами $100 \times 100 \times 100 \times 100$ имеются только тривиальные порождающие целочисленные решения вида k для аргументов вида $(k, 0, 0, 0)$. Напомним, что нулевые значения аргументов в исходную формулировку теоремы Ферма не включены.

С «инженерной» точки зрения раз целочисленных (натурального ряда) решений в четырехмерном суперкубе с размером ребра 100 не существует, то их и вообще не существует. ☺

А как обстоит дело с почти целыми решениями? Вот ответ:

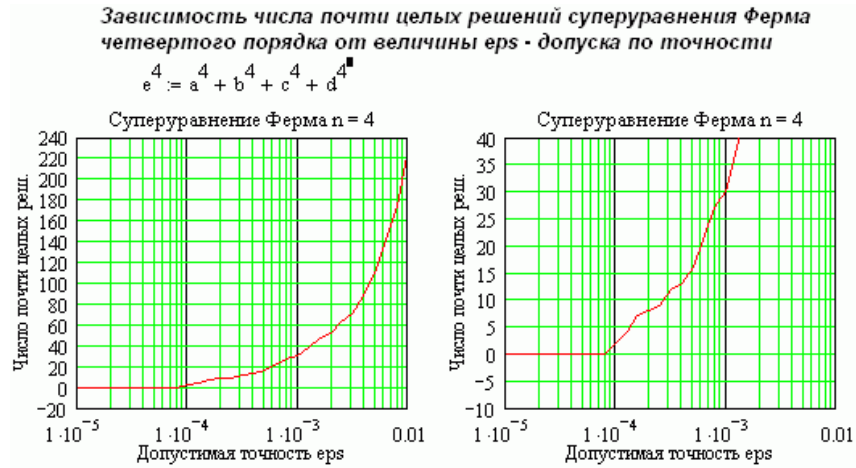


Рис. 4.2.3. Число почти целочисленных решений суперуравнения Ферма четвертой степени в суперкубе четвертого порядка с ребром длиной 20 уменьшается с повышением требований к точности решения. Начиная с некоторой точности почти целочисленных решений нет, т.е. имеется порог, равный $\text{eps} = 0.8 \cdot 10^{-4}$. Это свидетельствует о том, что, по крайней мере, в суперкубе четвертого порядка с ребром длиной 20 точные целочисленные решения отсутствуют

$$\text{st1} := -7, -6.9.. -3 \quad \text{eps}(\text{st1}) := 10^{\text{st1}} \quad e^4 := a^4 + b^4 + c^4 + d^4$$

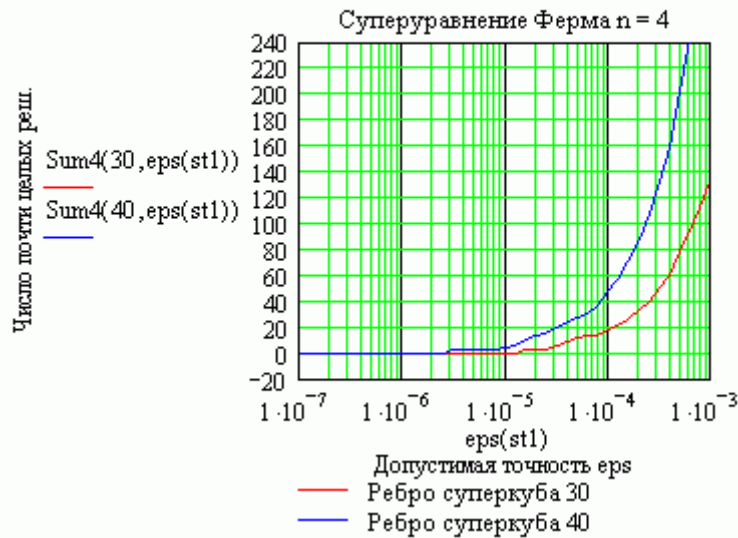


Рис. 4.2.4. С увеличением диапазона изменения аргументов порог наличия почти целочисленных решений суперуравнения Ферма четвертой степени понижается. Для суперкуба с ребром 30 единиц он равен $1.4 \cdot 10^{-5}$, а для суперкуба с ребром 40 единиц уже $2.8 \cdot 10^{-6}$

Таким образом, можно предположить, что четырехмерное суперуравнение Ферма не имеет целочисленных, в натуральных числах, решений не только на грани четырехмерного суперкуба, как это доказано в теореме Ферма, но и во всем пространстве изменения аргументов, т.е. в суперкубе произвольной величины разумного размера, т.е. со стороной 100 единиц. Но, не будем отнимать хлеб у математиков, пусть они сами проверяют эту гипотезу, если сочтут необходимым. Опровержение см. ниже.

Аналогичным образом при проверке в Маткаде дело обстоит и с пятимерным суперуравнением Ферма в суперкубе с ребром 50 единиц имеются только тривиальные целочисленные решения вида k для аргументов вида $(k, 0, 0, 0, 0)$.

Посмотреть более широкий диапазон аргументов с помощью Маткада на персональном компьютере уже довольно сложно ввиду быстрого увеличения времени счета. Для названных примеров счет длится пару минут и дольше.

Получив такой результат, не будет лишним заглянуть в Интернет. Оказывается что, и для четвертого, и для пятого порядка суперуравнения Ферма существуют примеры целочисленного решения:

«В 1988 году Роджер Фрай и Элкис нашли умопомрачительные 3х-членные разложения 4х-мерного куба:

$$422481^4 = 414560^4 + 217519^4 + 95800^4 \quad (\text{Роджер Фрай}), \quad (4.2.6)$$

$$20615673^4 = 18796760^4 + 15365639^4 + 2682440^4 \quad (\text{Элкис}). \quad (4.2.7)$$

В 1966 году Л. Ландер, Т. Паркин и Дж. Селфридж нашли 4х-членное разложение 5ти-мерного куба:

$$144^5 = 133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 \quad (4.2.8)»$$

Конец цитаты.

Нетрудно видеть, что один из аргументов равен нулю, и что практически все переменные и решения больше ста, а, следовательно, уже не представляют особого значения, как для «инженера», так и для инженера.

Отметим и особенность Маткада, подтверждающая положение, что результаты, полученные в математических программах, например, в Маткаде, очень полезно проверять и в альтернативных программах:

Любопытная особенность Маткада 2001: перестановка больших чисел дает разные результаты:

$$20615673^4 - (2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 + 0^4) = 0$$

$$20615673^4 - (2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 + 0^4) = 0$$

$$20615673^4 - (15365639^4 + 18796760^4 + 2682440^4 + 0^4) = -35184372088832$$

$$20615673^4 - (18796760^4 + 15365639^4 + 2682440^4 + 0^4) = -35184372088832$$

$$20615673^4 - (18796760^4 + 2682440^4 + 15365639^4 + 0^4) = 0$$

Рис. 4.2.5. Фрагмент рабочего поля Маткада. Перестановка слагаемых приводит к неправильному результату

Как видно из сказанного, Великая теорема Ферма исключает целочисленные решения только на одной из граней многомерного суперкуба аргументов суперуравнения Ферма с любой длиной ребра.

Можно лишь предполагать, случайно ли именно так сформулировал Ферма свою теорему, и ему в этом повезло, или намеренно, поскольку другие способы обобщения уравнения Пифагора дают целочисленные решения.

Заключение

Итак, уравнение Пифагора может быть обобщено не только уравнением Ферма, но и другими способами. Выше обнаружены и рассмотрены очевидные и не очень свойства уравнений Пифагора и Ферма и их обобщений. Это следующие свойства.

Уравнение Ферма

Эндрю Уайлс доказал, что уравнение Ферма, не имеет целочисленных решений.

Почти целочисленные решения уравнения Ферма существуют и они упорядочены. Они структурированы, как в 2D, так и в 3D графических представлениях: характерный узор в 2D и «парус», натянутый на «мачты», в 3D. В решениях можно выделить независимые, порождающие. Независимые порождают соответствующие симметричные и кратные решения. Число порождающих почти целочисленных решений уравнения Ферма сравнительно невелико и возрастает по мере увеличения диапазона изменения аргументов ускоренно, по параболе. Отсюда можно заключить, что плотность таких

решений примерно постоянна. Небезынтересным может оказаться статистическое исследование плотности распределения отклонений почти целочисленных решений от соответствующих целых чисел.

Почти целочисленные решения в ограниченном диапазоне изменения аргументов уравнения имеют порог точности, который уменьшается как с увеличением диапазона, так и с увеличением степени уравнения.

Уравнение Пифагора

Как известно с незапамятных времен, уравнение Пифагора имеет целочисленные решения. Свойства этих решений следующие.

Целочисленные решения уравнения Пифагора упорядочены, имеют четкую структуру, как в 2D, так и в 3D представлениях. Ввиду симметрии аргументов уравнения, целочисленные решения порождаются независимыми, добавлением симметричных и кратных. Число порождающих решений (точек) сравнительно невелико и растет примерно пропорционально диапазону изменения аргументов уравнения Пифагора, что указывает на то, что их плотность уменьшается с увеличением диапазона изменения аргументов.

Почти целочисленные решения уравнения Пифагора имеют примерно такие же свойства, что и у решений уравнения Ферма.

Многомерное обобщение уравнения Пифагора

N-мерное суперуравнение Пифагора имеет целочисленные решения, среди которых есть и независимые, порождающие все остальные. Число порождающих целочисленных решений суперуравнения Пифагора растет с ускорением по мере роста диапазона изменений аргументов в n-мерном кубе, во всяком случае, для $n=3$, и $n=5$.

Многомерное обобщение уравнения Ферма

Великая теорема Ферма справедлива только на одной из граней суперкуба, в котором изменяются аргументы суперуравнения Ферма.

В суперкубе с длиной ребра 100 единиц целочисленных решений суперуравнений Ферма четвертого и пятого порядков нет. Однако, за его пределами, далеко для суперуравнения пятого порядка и очень далеко для суперуравнения четвертого порядка, на грани суперкуба целочисленные решения, по крайней мере, одно – два, есть.

Свойства почти целочисленных решений суперуравнения Ферма для третьей, четвертой, пятой, и вероятно, более высоких степеней приблизительно те же, что и у уравнения Ферма.

Отметим, что при кратном увеличении координат точки, порождающей почти целые решения уравнений, кратно же увеличиваются и ошибки, что при достаточной кратности выводит решение из допуска.

Процесс разработки доказательства Великой теоремы Ферма привел к получению новых важных и полезных результатов для самой математики. Однако о каких-либо практических, полезных в технике или, хотя бы в других науках в Интернете не упоминается, хотя обсуждение этого вопроса ведется на многих форумах. Высказывания обычно неконструктивны, сводятся лишь к обличению теоремы как совершенно бесполезной в практическом плане.

В противовес, можно предложить, а быть может, притянуть за уши, следующее приложение полученных результатов. С практической точки зрения помехоустойчивой передачи дискретных сигналов в каналах связи с помехами может быть использовано то свойство суперуравнения Ферма третьего порядка, что в ограниченном кубе изменения аргументов, сравнительно малого размера, целочисленных порождающих решений всего несколько. Это позволяет выбрать эти комбинации аргументов и решений в качестве разрешенных. В результате кодирование будет осуществлено с существенной избыточностью, которая позволит отбраковывать недопустимые комбинации, полученные в результате наличия в канале передачи шума. А м.б. и исправлять ошибки на приемной стороне.

Еще одним, бытовым или эстетическим, приложением может быть графическое представление целочисленных и почти целочисленных решений уравнений Пифагора и Ферма, например, рисунки на клеенке или узоры обоях, а также в градостроительстве и других арт-проектах.

Наконец, представленные в настоящей статье рисунки и другие результаты могут подтолкнуть кого-то к продолжению исследований или к идеям их практического применения. Например, можно попытаться выяснить, какова закономерность решений уравнений, приводящая именно к такому красивому расположению точек на графическом представлении решений.

Объяснение того, что теорема Ферма доказывалась столь продолжительное время, может быть, состоит в том, что не нашлось достаточно существенного, за исключением развития математики как таковой, практического приложения теоремы.

Об этом стало как-то не принято говорить, но наука разделяется на «чистую» и «прикладную». «Чистая» наука, стремится получить новые знания, но не преследует утилитарно-прикладных и меркантильных целей. «Прикладная» имеет непосредственный выход в практику и дает определенный экономический эффект.

Прикладная наука в настоящее время основывается на выпрашивании учеными всевозможных грантов, когда им приходится непременно доказывать, может быть и лукавя, что результаты дадут немедленный финансовый эффект, или, по крайней мере, прославят спонсоров. Естественно, подавая такую заявку, ученый и сам должен быть с высокой вероятностью уверен в существовании и положительности, с точки зрения полезности, ожидаемых результатов. Прикладной ученый ограничен, если не задавлен, строгими временными рамками и необходимостью точного выполнения договора гранта. Это характерная особенность «прикладной» науки. Но «чистая» считается более престижной. Поэтому, чтобы повысить свой статус, ученые не уточняют, что их исследования прикладные.

Людей, способных заниматься чистой наукой, бескорыстно не так уж и много. Но общество помогает состояться им только спорадически. И отсюда значительные потери общественного интеллекта. Нужно бы на постоянной основе оказывать целенаправленную помощь именно таким, не очень приспособленным к современной жизни, но талантливым людям.

Литература

1. Дмитрий Абраров. Теорема Ферма: феномен доказательств Уайлса 28.12. 2006
<http://polit.ru/article/2006/12/28/abrarov/>
2. A. Porges (1954). «Devil and Simon Flagg». The Magazine of Fantasy and Science Fiction.. Русский перевод: А. Порджес. Саймон Флэгг и дьявол // Квант. — 1972. — Т. 8. — С. 17-22.
3. Федосов Б.Т. Личная страница
http://model.exponenta.ru/bt/bt_fed.html

Приложения

- П 1. Целочисленные и почти целочисленные решения уравнения Пифагора в ограниченном диапазоне изменения его аргументов
- П 2. Свойства «почти целочисленных» решений уравнения Ферма
- П 3. Графическая прикладная эстетика решений уравнений Пифагора и Ферма
- П 4. Внутренняя кухня получения выдающихся результатов
- П 5. Архив документов Маткада 2001 (версия 10)

П 1. Целочисленные и почти целочисленные решения уравнения Пифагора в ограниченном диапазоне изменения его аргументов

Уравнение Пифагора из его теоремы имеет целочисленные решения. О некоторых из них знали еще древние египтяне («египетский треугольник» с целыми катетами 3 и 4 и целой гипотенузой, равной 5), и древние китайцы, задолго до Пифагора.

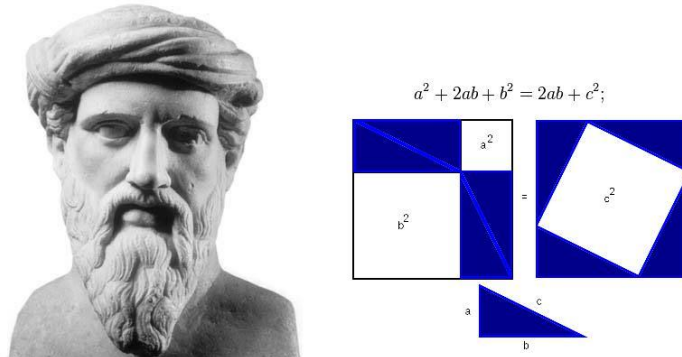


Рис. П1.1. Пифагор и одно из доказательств, геометрическое и очень красивое, его теоремы, связывающей длину катетов с длиной гипотенузы $a^2 + b^2 = c^2$. Материал из Википедии

Уравнение Пифагора имеет целочисленные решения, см. в архиве Приложения 5 файл 131224_App1_Pythagoras_ProdPoint.mcd:

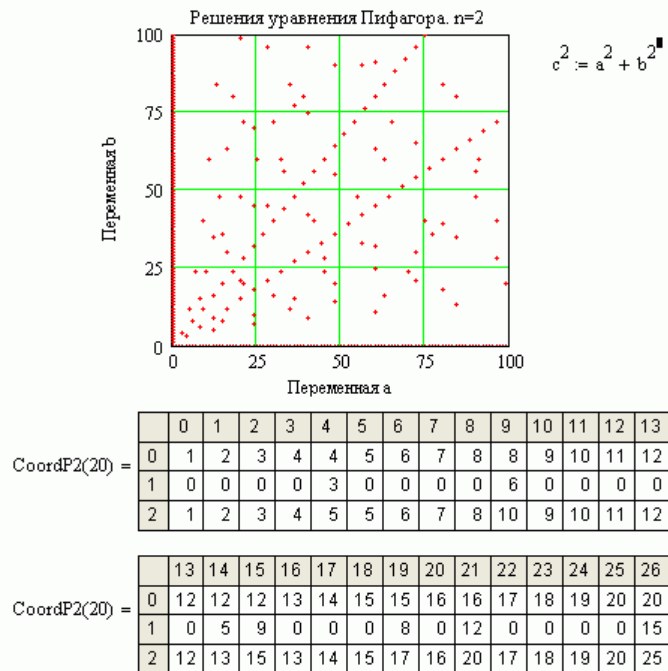


Рис. П1.2. Расположение точек, соответствующих целочисленным решениям уравнения Пифагора обладает характерной структурой, в том числе симметрией и отличается своего рода эстетикой

Тем не менее, рассмотрим поведение почти целочисленных решений этого уравнения в заданных пределах изменения его аргументов, т.е. длин катетов:

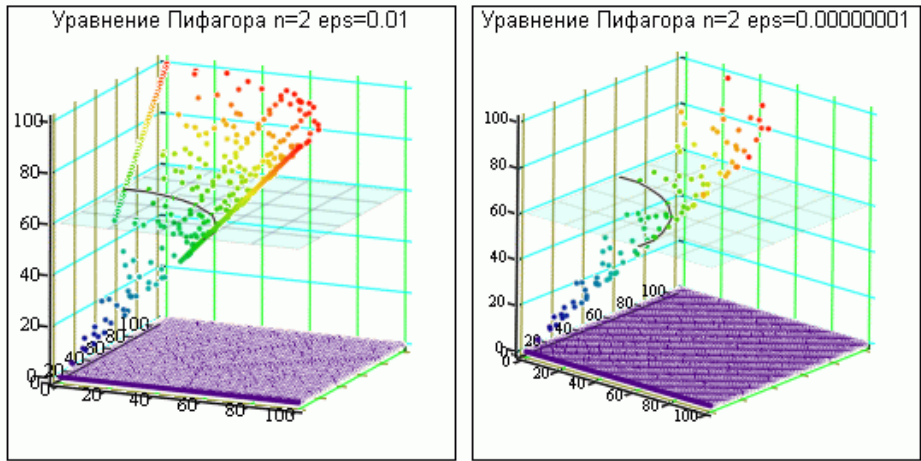
Целочисленные и почти целочисленные решения уравнения Пифагора

$$Z(x,y,n,\varepsilon) := \left(x^n + y^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$c^2 := a^2 + b^2$$

$$ZA(x,y,n,\varepsilon) := \begin{cases} Z(x,y,n,\varepsilon) & \text{if } |(Z(x,y,n,\varepsilon)) - \text{round}(Z(x,y,n,\varepsilon))| < \varepsilon \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$i := 1,2..100 \quad j := 1,2..100 \quad ZM2_{i,j} := ZA(i,j,2,0.01) \quad ZM2C_{i,j} := ZA(i,j,2,0.00000001)$



ZM2,(XL2,YL2,ZL2),F60 ZM2C,(XL2,YL2,ZL2),F60

Рис. П1.3. С повышением требований к точности решения уравнения Пифагора, т.е. близости его к целому числу, число решений в диапазоне изменения аргументов 100x100 стремится к конечному числу. Это значит, что здесь имеется определенное число целых решений. На правом графике остались только целочисленные решения ввиду высокого требования к точности решения. Таких решений в квадрате 100x100 всего 126, включая и симметричные, и кратные

$$Z(x,y,n) := \left(x^n + y^n\right)^{\frac{1}{n}} \quad n := 2$$

$$ZI(x,y,n) := \begin{cases} Z(x,y,n) & \text{if } (Z(x,y,n) = \text{round}(Z(x,y,n))) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Полное число целочисленных решений, включая симметричные и кратные

$$\text{Sum}(n,m) := \begin{cases} S \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..m \\ \quad \text{for } j \in 1..m \\ \quad \quad ((S \leftarrow S + 1)) \text{ if } (ZI(i,j,n) > 0) \\ S \end{cases}$$

Sum(2,5) = 2	Sum(2,10) = 4	Sum(2,20) = 14
Sum(2,100) = 126	Sum(2,200) = 302	Sum(3,100) = 0

Рис. П1.4. Число целочисленных решений уравнения Пифагора увеличивается с увеличением диапазона изменения аргументов. Так, в квадрате 20x20 имеется 14 целочисленных решений, не содержащих нулевых аргументов, а в квадрате 100x100 всего 126 таких решений (Sum(2,100) = 126). В то же время, для уравнения Ферма, n = 3 целочисленных решений в этом квадрате нет вообще (Sum(3,100) = 0), что и следует из теоремы Ферма

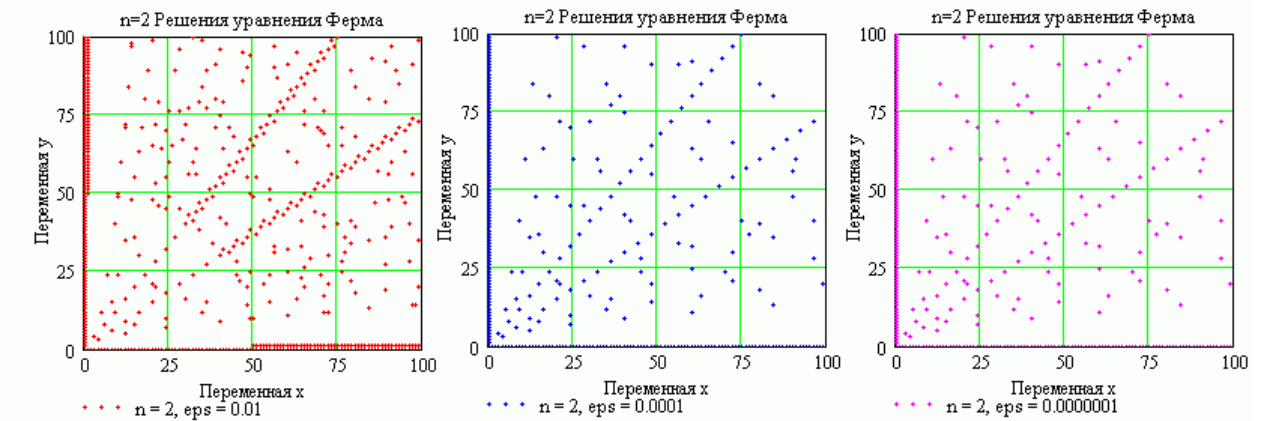


Рис. П 1.5. По мере увеличения требований к точности почти целочисленных решений в квадрате размером 100x100 точек остаются только целочисленные решения уравнения теоремы Пифагора (уравнения Ферма при $n = 2$).

В качестве практического приложения можно попробовать выпустить клеенку или обои с такими узорами. Да и градостроителям это может быть небезынтересно. ☺ Как-никак, хоть что-то полезное в быту, заодно более широкий круг людей сможет узнать о существовании теорем Ферма и Пифагора и поразмышлять об их целочисленных и близких к ним решениях. Тут и эстетика, и просвещение

Обратимся вновь к целочисленным решениям уравнения Пифагора.

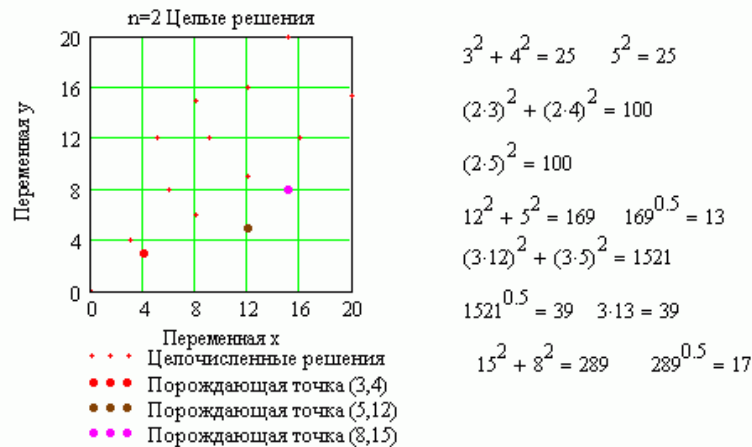


Рис. П1.6. В квадрате 20x20 довольно много, точнее 14, целочисленных решений уравнения Пифагора. Среди них есть и симметричные пары с «минимальными» значениями аргументов, кратное увеличение которых также дает целочисленные решения. Одно из каждой пары таких минимальных решений, как определено выше, является **порождающим или независимым**. В данном случае, в квадрате 20x20 порождающих решений (точек) всего три

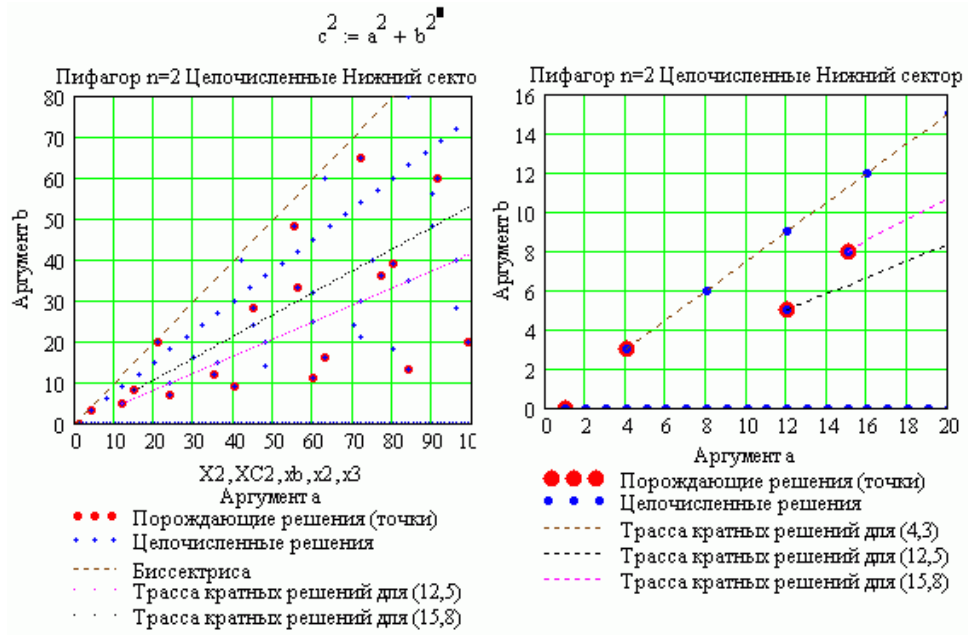


Рис.П1.7. Расположение на плоскости аргументов целочисленных решений (в нижнем секторе), а также порождающих точек и некоторые трассы. Справа в крупном масштабе показаны трассы, на которых располагаются кратные порождающим решения

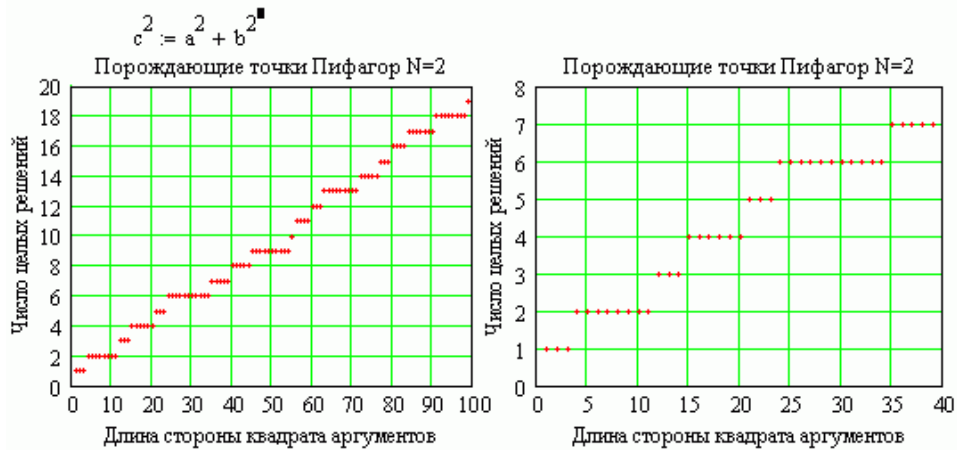


Рис.П1.8. Число порождающих точек уравнения Пифагора в зависимости от диапазона изменения аргументов уравнения. В квадрате 100x100 всего 19 порождающих точек (решений)

Как видно, в рассматриваемом диапазоне изменения аргументов число порождающих точек растет примерно пропорционально длине стороны квадрата, в котором изменяются аргументы. Это свидетельствует об уменьшении плотности таких решений с увеличением диапазона.

Для сведения отобразим на плоскости значения аргументов в уравнении Пифагора, при которых стороны треугольника и гипотенузы целые в еще большем диапазоне:

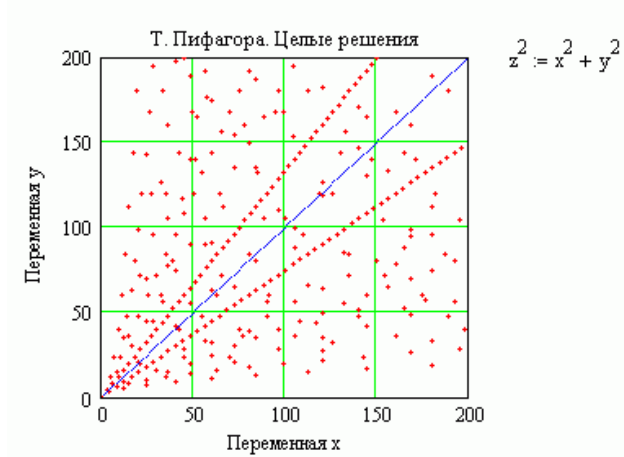


Рис.П1.9. Сочетания целых значений катетов треугольника, при которых и гипотенуза целая в диапазоне изменения длин катетов 200x200. Всего решений 302. Отметим, что вблизи осей решения отсутствуют. Поскольку катеты входят в уравнение симметрично, то расположение точек симметрично, и каждой целой гипотенузе, являющейся целочисленным решением уравнения, здесь соответствуют две точки. Точки, сгруппированные на одной линии это кратные порождающим решения уравнения

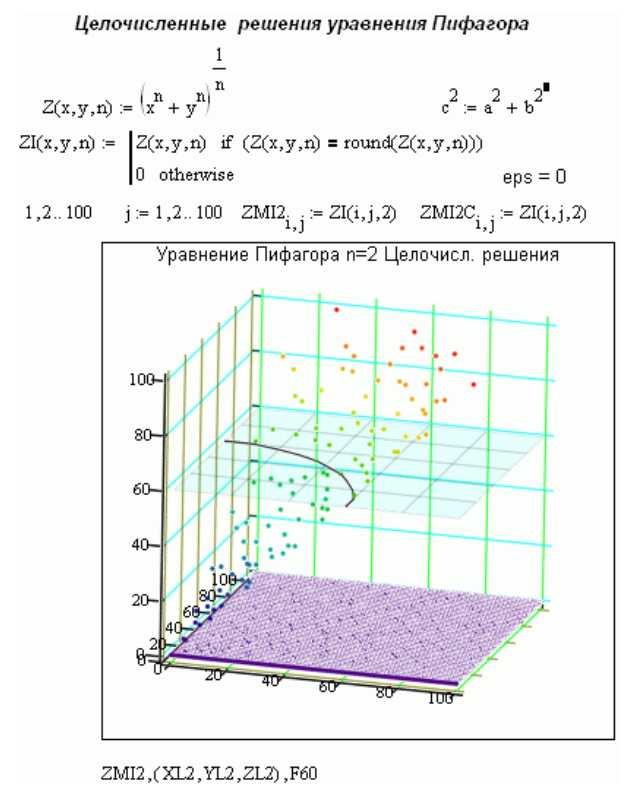


Рис. П1.10. Точные целочисленные решения уравнения Пифагора второй степени, представленные в трехмерном пространстве, структурированы - располагаются на поверхности «паруса». «Мачты» отсутствуют

П2. Свойства почти целочисленных решений уравнения Ферма

Приведенные ниже вычисления проведены и иллюстрации построены в архиве Приложения 5 в файле 131227_App2_Ferm_QuInt_Sol.mcd

Целочисленные и почти целочисленные решения уравнения Ферма

$$Z(x,y,n,\varepsilon) := \frac{1}{(x^n + y^n)^n} \quad c^2 := a^2 + b^2$$

$$ZA(x,y,n,\varepsilon) := \begin{cases} Z(x,y,n,\varepsilon) & \text{if } |(Z(x,y,n,\varepsilon)) - \text{round}(Z(x,y,n,\varepsilon))| < \varepsilon \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Почти целочисленные решения. Отсчет от начала координат

```

QuIntSol(m,n,ε) :=
  P2 ← 0
  c2 ← 0
  for i ∈ 0..m
    for j ∈ 0..i
      if ZA(i,j,n,ε) > 0
        P20,c2 ← i
        P21,c2 ← j
        P22,c2 ← ZA(i,j,n,ε)
        c2 ← (c2 + 1)
  P2
  
```

$m \geq 1$
 m - сторона квадрата аргументов
 $m > 0$
 n - степень уравнения Ферма
 ε - допуск почти точного (почти целочисленного) решения
 Симметричные решения не учитываются

$$\text{QuIntSol}(6,3,0.01) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6.009 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} m = 6 \\ n = 3 \\ \varepsilon = 0.01 \end{matrix}$$

QuIntSol(50,3,0.01) =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	6	7	7	8
1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
2	1	2	3	4	5	6	6.009	7	7.007	8

$\text{cols}(\text{QuIntSol}(5,3,0.001)) = 5 \quad \text{cols}(\text{QuIntSol}(50,3,0.001)) = 83 \quad \text{cols}(\text{QuIntSol}(500,3,0.0001)) = 1565$

Рис. П2.1. Программа Маткада вычисления почти целочисленных решений уравнения Ферма и примеры решения. Определяется и число целочисленных решений в заданном диапазоне изменения аргументов. Например, $\text{cols}(\text{QuIntSol}(50,3,0.001))$ означает, что при изменении аргументов a и b уравнения в пределах от 0 до 50, число решений, близких с точностью 0.001 к целочисленным, всего 83

**Селекция и координаты порождающих точек (независимых решений)
Почти целочисленные решения**

Для почти целых решений число кратных решений ограничено

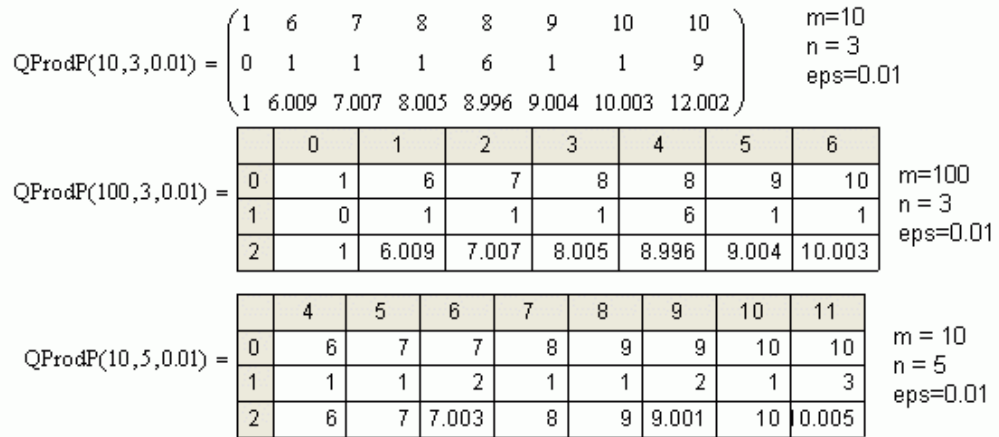


Рис. П2.2. Примеры почти целочисленных решений уравнения Ферма третьего и пятого порядков. Выбраны только порождающие, т.е. независимые решения. Другими словами, не учитываются ни симметричные, ни кратные решения

Число порождающих точек (независимых решений)

Симметричные и кратные решения не учитываются. Учитываются решения с нулевыми значениями.

$NumQProdP(10,3,0.01) = 8$ $NumQProdP(20,3,0.01) = 20$ $NumQProdP(100,3,0.01) = 299$

$s := 0,1..100$ $c^3 := a^3 + b^3$ $eps=0.01$ $s1 := 0..20$

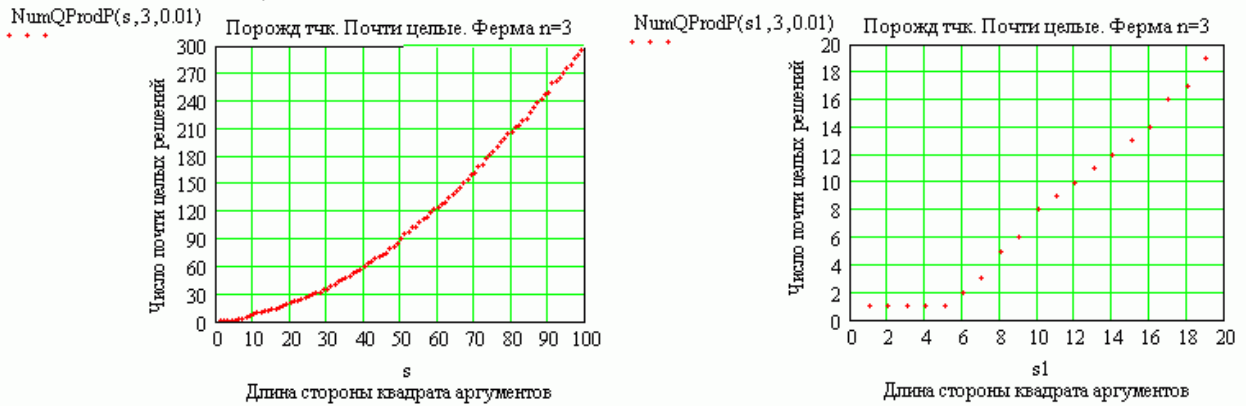


Рис.П2.3. С увеличением диапазона изменения аргументов увеличивается и число точек, порождающих почти целые решения уравнения Ферма третьего порядка

$\text{NumQProdP}(10, 4, 0.01) = 10$ $\text{NumQProdP}(20, 4, 0.01) = 32$ $\text{NumQProdP}(100, 4, 0.01) = 547$
 $\text{NumQProdP}(10, 10, 0.01) = 22$ $\text{NumQProdP}(20, 10, 0.01) = 81$ $\text{NumQProdP}(100, 10, 0.01) = 1628$

$$c^3 = a^3 + b^3$$

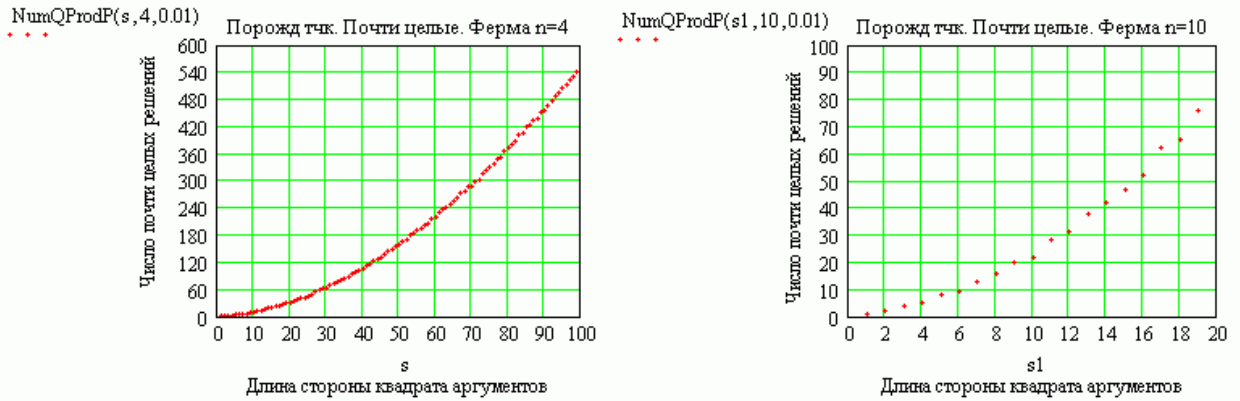


Рис.П2.4. Зависимость числа порождающих решений для уравнений Ферма 4-го и 10-го порядков от величины диапазона изменения аргументов

Как видно из рисунков, при изменении аргументов в рассматриваемом диапазоне, число порождающих почти целочисленных решений растет примерно по параболе.

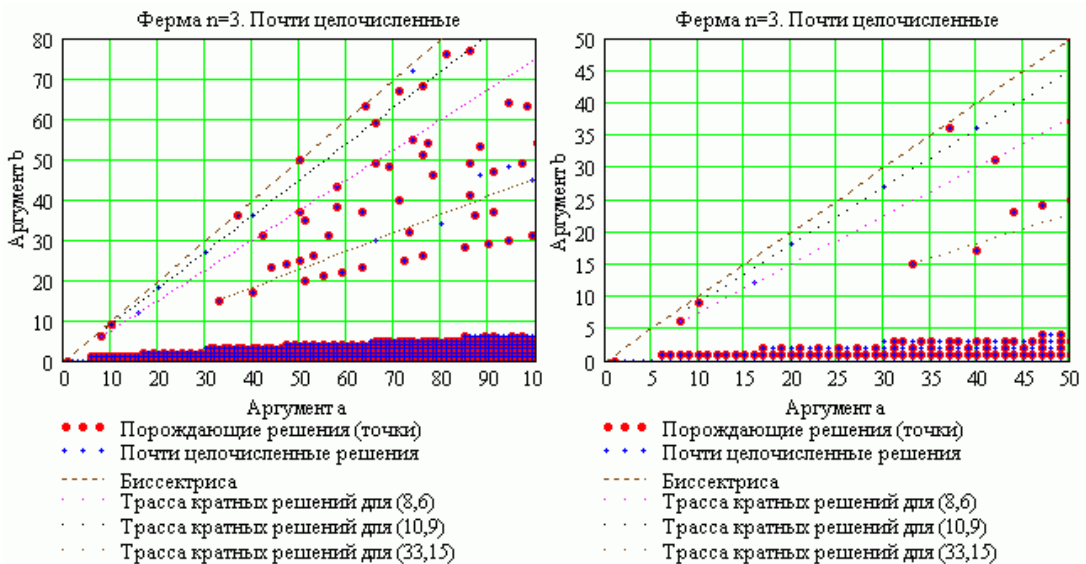


Рис.П2.5. Почти целочисленные, в том числе и порождающие, решения уравнения Ферма 3-го порядка. Для некоторых порождающих точек показаны трассы кратных решений, число которых, ввиду допусков по точности, ограничено, т.е. конечно

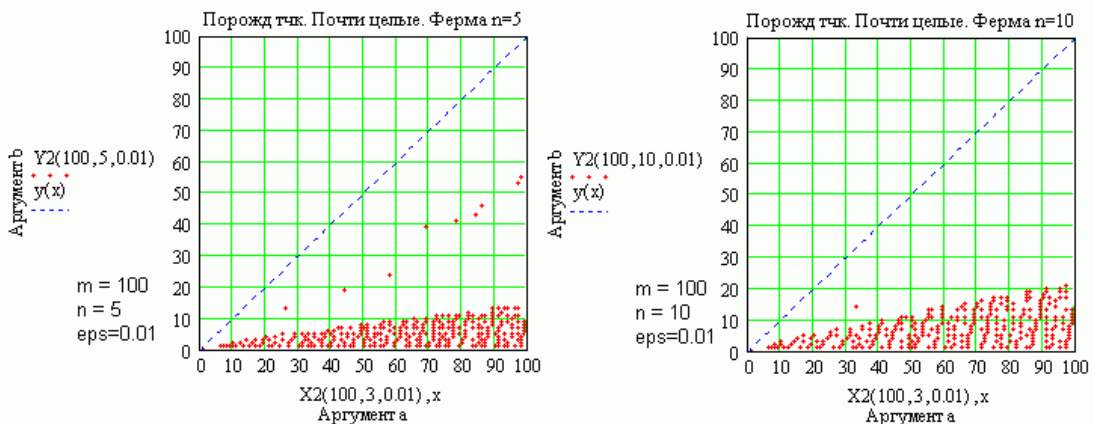


Рис.П.2.6. То же, для уравнений Ферма 5-го и 10-го порядков. Как видно, порождающие решения группируются в основном вдоль осей координат

П 3. Графическая прикладная эстетика решений уравнений Пифагора и Ферма

Приведенные ниже иллюстрации вычислены и построены в архиве Приложения 5 в файле 131227_App2_Ferm_QuInt_Sol.mcd

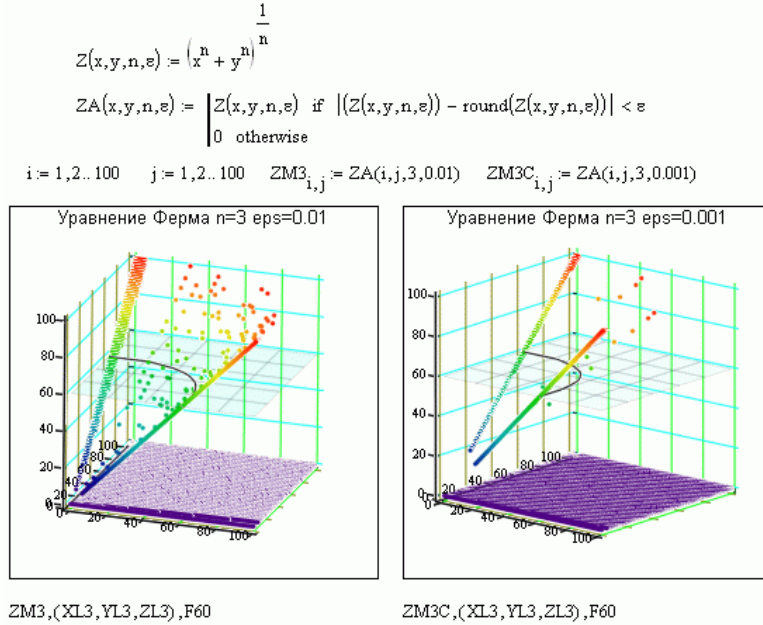


Рис. ПЗ.1. «Парус» и «мачты» приближенного решения уравнения Ферма третьего порядка, представленного в 3D. Число почти целочисленных решений заметно уменьшается с повышением требований к точности решения

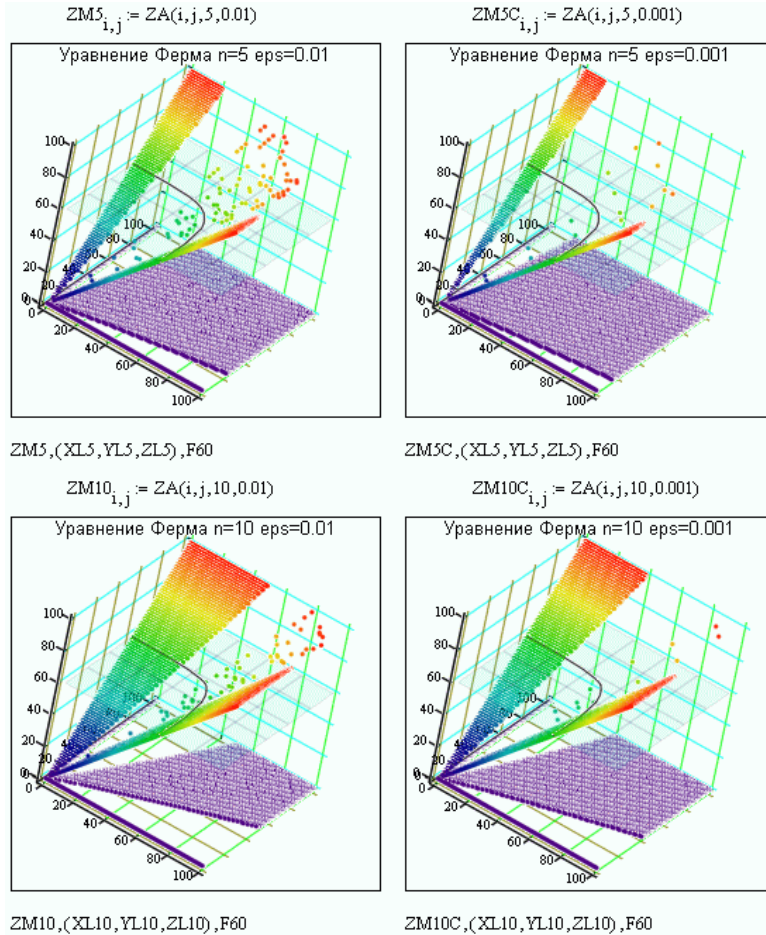


Рис. ПЗ.2. 3D-представление почти целочисленных решений уравнения Ферма пятой и десятой степеней. «Мачты» превращаются в боковые «паруса»

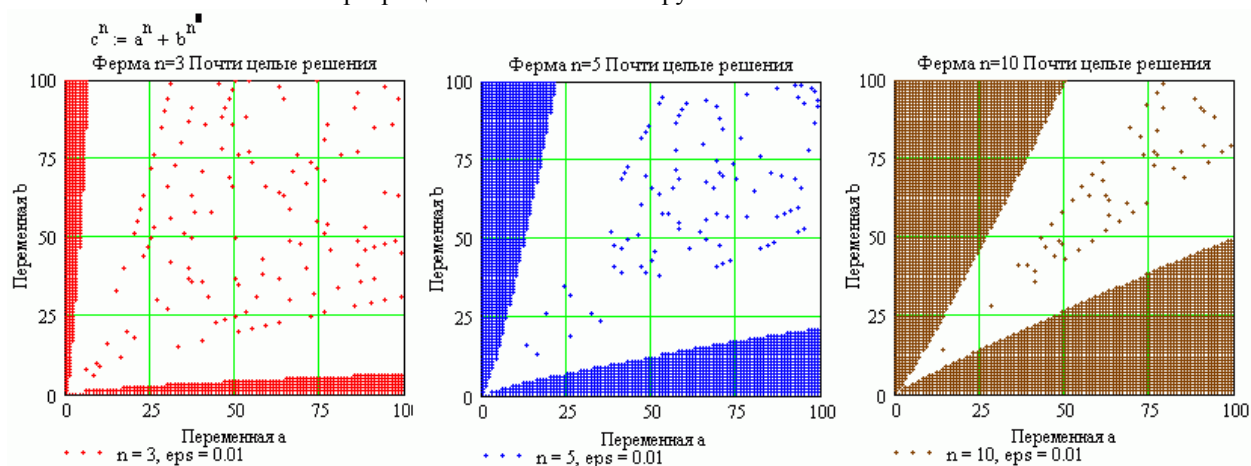


Рис. ПЗ.3. 2D-представление почти целочисленных решений уравнения Ферма. Эстетика восприятия определяется симметрией расположения точек на плоскости. Насколько помнится, в 60-х годах прошлого века какой-то американский математик на скучном совещании догадался расположить простые числа на листе в клетку по спирали. Получился довольно красивый узор, который поместили на клеенке. И такая клеенка пользовалась успехом у домохозяек. ☺

Как видно, почти целые решения уравнения Ферма также имеют своего рода порождающие точки. Но порождают они, в отличие от теоремы Пифагора, т.е. $n = 2$, и где имеются точные целочисленные решения, ограниченное число точек, приближенных решений, которые с отдалением от начала координат теряют абсолютную точность и выходят из допуска и, следовательно, из рассмотрения.

П 4. Внутренняя кухня получения выдающихся результатов

Мне бы хотелось обратить внимание вот на что. Сейчас повсюду внедряются всякого рода элементы «наукометрии» и «эффективной организации» научного процесса: рейтинги: цитируемость, число статей, гранты и прочие. Тем самым идет отбор напористых людей, но, насколько я мог наблюдать, напористость с одной стороны и глубина, и свежесть мысли с другой практически не совмещаются в одном человеке.

Однобокий «грантово-рейтинговый» подход выталкивает из круга ученых очень большую прослойку очень талантливых людей, талантливых свежим взглядом на мир, потенциально способных открыть что-то новое, даже принципиально новое. А «рейтинги» и гранты их просто убивают как потенциальных ученых, поскольку такие люди не могут, не умеют и не хотят толкаться локтями, доказывать на каждом перекрестке свою значимость и значимость своих исследований, как проведенных, так и предполагаемых.

Интересно отметить, что где-то на рубеже 50х – 60х годов XX столетия Президент АН СССР сделал доклад в Королевском обществе Великобритании, в котором обосновывал возможность и необходимость планирования в науке. Имелось в виду не планирование получения конкретных результатов, а планирование размаха исследований, их материального обеспечения. Доклад был встречен скептически. ☹

Мне кажется, что Кавендиш, не будь он богачом, не смог бы провести свои выдающиеся исследования, в наше время. Только случайно оказался знаменит, и уважаем Григорий Перельман и т.д. Даже в моей скромной, но продолжительной, сорокалетней практике преподавателя технических дисциплин в провинциальном вузе встречались удивительно светлые головы, которым даже в Советском Союзе вряд ли можно было на что-то рассчитывать, кроме заурядной должности. И было ужасно их жалко, поскольку я, практически не мог им помочь, и обидно за страну, которой невдомек, что их можно использовать для общей пользы. А ведь такие талантливые, но не приспособленные к жизни люди могли бы составить славу любой стране, которая обратила бы на них внимание! Как сделать, чтобы это произошло?

Этот вопрос, как возникают выдающиеся результаты, и кто их получает, столь интересен и важен для формирования неискаженного мировоззрения, что дадим довольно большую цитату из [1], посвященную ему. Автор разделяет позицию Дмитрия Абрарова.

«Зададимся вопросом – какова «внутренняя кухня» получения выдающихся результатов? Ведь интересно знать, как ученый организует свою работу, на что в ней ориентируется, как определяет приоритеты своей деятельности. Что можно сказать в этом смысле про Эндрю Уайлса? И неожиданно оказывается, что в современную эпоху активных научных коммуникаций и коллективного стиля работы у Уайлса был свой взгляд на стиль работы над суперпроблемами.

Уайлс шел к своему фантастическому результату на основе интенсивной непрерывной многолетней индивидуальной работы. **Организация его деятельности, говоря казенным языком, носила экстремально внеплановый характер.** Это категорически нельзя было назвать деятельностью в рамках определенного гранта, по которой необходимо регулярно отчитываться и опять всякий раз планировать получение определенных результатов к определенному сроку.

Такая деятельность вне общества, не использующая непосредственное научное общение с коллегами даже на конференциях, казалась противоречащей всем канонам работы современного ученого.

Но именно индивидуальная работа, позволяла выходить за рамки уже сложившихся стандартных понятий и методов. Такой стиль работы, замкнутый по форме и одновременно свободный по сути, позволял изобретать новые мощные методы и получать результаты нового уровня.

Стоявшая перед Уайлсом проблема (гипотеза Таниямы-Шимуры-Вейля) не находилась в те годы в числе даже ближайших вершин, которые могут быть покорены современной математикой. При этом никто из специалистов не отрицал ее огромного значения, и номинально она была в «мэйнстриме» современной математики.

Таким образом, деятельность Уайлса носила ярко выраженный внесистемный характер и результат был достигнут благодаря сильнейшей мотивации, таланту, творческой свободе, воле, более чем благоприятным материальным условиям для работы в Принстоне и, что крайне важно, взаимопониманию в семье.

Доказательство Уайлса, появившееся как гром среди ясного неба, стало своеобразным тестом для международного математического сообщества. Реакция даже самой прогрессивной части этого сообщества в целом оказалась, как ни странно, довольно нейтральной. После того как улеглись эмоции и восторги первого времени после появления знакового доказательства все спокойно продолжили свои дела. Специалисты по арифметической алгебраической геометрии потихоньку изучали «могучее доказательство» в своем узком кругу, остальные же бороздили свои математические тропы, расходясь, как и ранее, все дальше друг от друга.

Попробуем понять эту ситуацию, у которой есть как объективные, так и субъективные причины. Объективные факторы невосприятости, как ни странно, имеют корни в организационной структуре современной научной деятельности. Эта деятельность подобна катку, спускающемуся по наклонной вниз дороге и обладающему колоссальной инерцией: своя школа, свои сложившиеся приоритеты, свои источники финансирования, и т.д. Все это хорошо с точки зрения налаженной системы отчетности перед грантодателем, но мешает поднять голову и оглядеться по сторонам: а что собственно действительно является важным и актуальным для науки и общества, а не для очередной порции гранта?

Потом - опять же - не хочется вылезать из своей уютной норки, где все так знакомо, и залезать в другую, совсем незнакомую нору. Неизвестно, чего там ждать. Тем более, заведомо ясно - за вторжение денег там не дают.

Вполне естественно, что ни одна из бюрократических структур, организующих науку в разных странах, включая и Россию, так и не сделала выводов не только из феномена доказательства Эндрю Уайлса, но и похожего феномена нашумевшего доказательства Григория Перельмана другой, тоже знаменитой математической проблемы.

Субъективные факторы нейтральности реакции математического мира на «событие тысячелетия» лежат во вполне прозаичных причинах. Доказательство действительно необычайно сложное и длинное. Для неспециалиста в арифметической алгебраической геометрии оно кажется состоящим из наслоения терминологии и конструкций наиболее абстрактных математических дисциплин. Кажется, что автор и вовсе не ставил цель, чтобы его поняли как можно большее число интересующихся математиков.

Эта методологическая сложность, к сожалению, присутствует как неизбежная издержка великих доказательств последнего времени (например, разбор недавнего доказательства Григория Перельмана гипотезы Пуанкаре продолжается по сей день).

Сложность восприятия усиливается еще и тем, что арифметическая алгебраическая геометрия - весьма экзотическая подобласть математики, вызывающая трудности даже у профессиональных математиков. Дело усугублялось также и необычайной синтетичностью доказательства Уайлса, использовавшего разнообразные современные инструменты, созданные большим числом математиков в самые последние годы.

Но надо учесть, что перед Уайлсом и не стояла методическая задача объяснения – он конструировал новый метод. В методе работал именно синтез собственных гениальных идей Уайлса и конгломерата новейших результатов из различных математических направлений. И именно такая мощная конструкция протаранила неприступную проблему. Доказательство не стало случайностью. Факт его кристаллизации полностью соответствовал как логике развития науки, так и логике познания. Задача разъяснения такого супердоказательства представляется абсолютно самостоятельной, весьма непростой, хотя и очень перспективной проблемой».

П5. Архив документов Маткада 2001 (версия 10)

Архив Fermat_Pythagoras_Prop_MCD_10_131231.zip документов Маткада версии 10
в составе

131202_P3_Fermat_N_3_Plot3D_Line.mcd
131218_P41_Pythagoras_Produce_Point_N_3.mcd
131220_P41_Pythagoras_Produce_Point_N_4.mcd
131222_SuperFermat_N_3.mcd
131222_SuperFermat_N_4.mcd
131222_SuperFermat_N_5.mcd
131224_App1_Pythagoras_ProdPoint.mcd
131227_App2_Ferm_QuInt_Sol.mcd

см.

http://model.exponenta.ru/bt/Ferm_Pyph_MCD_10_131231.zip